



TESIS-SM 142501

**REDUKSI MODEL SISTEM LINEAR WAKTU DISKRIT TIDAK STABIL
MENGUNAKAN METODE PEMOTONGAN SETIMBANG**

KIKI MUSTAQIM
1214 201 042

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

**PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017**



THESIS-SM 142501

**MODEL REDUCTION OF UNSTABLE DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS
USING BALANCED TRUNCATION METHOD**

KIKI MUSTAQIM
NRP 1214 201 042

PROSPECTIVE SUPERVISOR
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2017

**REDUKSI MODEL SISTEM LINEAR WAKTU DISKRIT TIDAK STABIL
MENGUNAKAN METODE PEMOTONGAN SETIMBANG**


Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember


Oleh:
KIKI MUSTAQIM
NRP. 1214 201 042

Tanggal Ujian : 5 Januari 2017
Periode Wisuda : Maret 2017

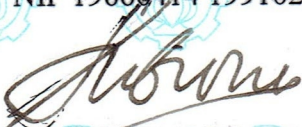
Disetujui oleh:


Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

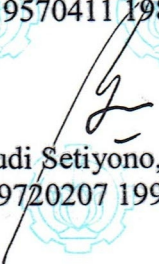
(Pembimbing)


Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

(Pembimbing)

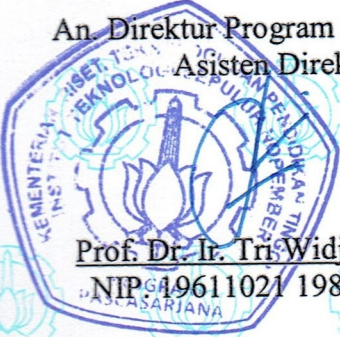

Dr. Subiono, M.S.
NIP. 19570411 198403 1 001

(Penguji)


Dr. Budi Setiyono, S.Si, MT
NIP. 19720207 199702 1 001

(Penguji)

An. Direktur Program Pascasarjana
Asisten Direktur


Prof. Dr. Ir. Tri Widjaja, M.Eng
NIP. 19611021 198603 1 001

REDUKSI MODEL SISTEM LINEAR WAKTU DISKRIT TIDAK STABIL MENGUNAKAN METODE PEMOTONGAN SETIMBANG

Nama Mahasiswa : Kiki Mustaqim
NRP : 1214 201 042
Pembimbing : Dr. Didik Khusnul Arif S.Si.,M.Si
Co-Pembimbing : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

ABSTRAK

Reduksi model dari suatu sistem adalah metode aproksimasi dari suatu sistem dengan orde lebih rendah tanpa kesalahan yang signifikan tetapi memiliki perilaku dinamikanya hampir sama dengan model awal. Reduksi model dari sistem tidak stabil, sistem didekomposisi menjadi sub sistem stabil asimtotik dan sub sistem tidak stabil. Pada sub sistem stabil asimtotik digunakan metode pemotongan setimbang sehingga diperoleh orde yang lebih rendah. Model akhir tereduksi diperoleh dengan menggabungkan kembali sub sistem stabil tereduksi dan sub sistem tidak stabil. Diharapkan reduksi model yang dihasilkan merepresentasikan keadaan dari sistem awal. Metode ini diaplikasikan pada *shallow water problem* yang mendeskripsikan masalah aliran sungai untuk menentukan kedalaman aliran sungai .

Kata kunci: *Reduksi model, dekomposisi, Metode Pemotongan setimbang, Sistem Tidak Stabil*

MODEL REDUCTION OF UNSTABLE DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS USING BALANCED TRUNCATION METHOD

Name : Kiki Mustaqim
NRP : 1214 201 042
Supervisor : Dr. Didik Khusnul Arif S.Si., M.Si
Co-Supervisor : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si

ABSTRACT

Model Reduction is a technique for systems approximation methods with lower order but have dynamical behaviour equal or similar to the original model. Reduction of unstable systems, the systems is decomposed into stable and unstable subsystems. In stable subsystems balanced truncation method is used to obtain the system with lower order. Final reduced model is obtained by adding reduced stable subsystems part and already separated unstable subsystems part. Expected reduction of the resulting model represents the actual state of the systems. This method applied to shallow water problem to determine depth of the river flow.

Keywords : *Model reduction, decomposition, Balanced truncation methods, Unstable systems*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji ke hadirat Allah SWT atas segala curahan limpahan rahmat dan karuniaNya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul “Reduksi Model Sistem Linear Waktu Diskrit Tidak Stabil Menggunakan Metode Pemotongan Setimbang “. Shalawat serta salam kepada nabi besar Muhammad SAW.

Dalam penyelesaian Tesis ini, banyak kendala dan hambatan dalam pengerjaannya. Namun, berkat bimbingan, arahan, bantuan serta dukungan dari berbagai pihak, akhirnya penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada semua pihak, terutama kepada yang terhormat :

1. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si.,M.Si dan Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bantuan, bimbingan, arahan dan motivasinya dalam mengerjakan Tesis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak DR. Subiono, M.S.,Dr. Budi Setiyono, S.Si, MT selaku dosen penguji atas semua kritik dan saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.
3. Bapak Dr. Imam Mukhlas, S.Si., M.T selaku dosen wali yang telah membimbing dan memotivasi selama menempuh pendidikan magister
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberi bimbingan serta arahan selama menempuh pendidikan magister.
5. Bapak Dr. Imam Mukhlas selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS
6. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah mendidik penulis baik di dalam maupun di luar perkuliahan serta Bapak dan Ibu staf Tata Usaha Jurusan Matematika ITS.
7. Kedua orang tua tercinta Ayah Bukhari Rasyid dan Ibu Mena Risa terima kasih atas perhatian, doa dan segala dukungannya, beserta istriku tercinta Istiqomah Buddhisatyani Adi, terima kasih atas kesetiaan, kesabaran,

dukungan, motivasi, perhatian, waktu dan doa yang telah diberikan selama menempuh studi di ITS.

8. Saudaraku Abang Dian Khaidir, Adik Masietah, Heri Irawan, Sopian, Akbar dan Fadzil yang telah mendoakan dan memberikan semangat kepada penulis
9. Sahabat di keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2014 yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis.
10. Pemerintah Republik Indonesia khususnya Presiden Republik Indonesia ke-VI Bapak H.Susilo Bambang Yudhoyono yang telah memberikan dukungan materil melalui beasiswa Pra Magister-Magister Sainstek Tahun 2013 yang merupakan program turunan dari Masterplan Percepatan dan Perluasan Pembangunan Ekonomi Indonesia (MP3EI). Dengan beasiswa tersebut penulis dapat melaksanakan studi magister di ITS dengan sebaik-baiknya.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, Semoga Allah membalas semua kebbaikannya.

Penulis menyadari dalam Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan khususnya dalam mempelajari reduki model.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	i
ABSTRAK.....	iii
ABSTRACT.....	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
BAB I. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
BAB II. KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....	5
2.1 Penelitian-Penelitian Terkait.....	5
2.2 Sifat Linear Dinamik.....	7
2.2.1 Sifat-Sifat Sistem	7
2.3 Operator Gabungan Realisasi Sistem	10
2.4 Reduksi Model	11
2.4.1 Contoh Sistem Tidak Stabil dan Reduksinya.....	12
2.4 Pemodelan Aliran Air Sungai	13
BAB III. METODE PENELITIAN.....	15
3.1 Tahapan Penelitian	15
BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN.....	17
4.1 Diskritisasi Model.....	17
4.2 Sifat Sistem Awal.....	17
4.3 Dekomposisi Sistem.....	22
4.4 Reduksi Sub Sistem Stabil.....	25
4.5 Model Akhir Tereduksi.....	32
4.6 Kesalahan Reduksi.....	33

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN.....	35
5.1 Kesimpulan.....	35
4.2 Saran.....	35
DAFTAR PUSTAKA.....	37
LAMPIRAN.....	39

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Gambar dari pemodelan aliran sungai	13
Gambar 4.1.	Step Response sub sistem G_s dan G_{bal}	31
Gambar 4.2.	Step Response sub sistem G_s dan G_{sr_bt}	33
Gambar 4.3.	Step Response sistem awal G dan sistem akhir tereduksi G_r_bt	34

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Nilai eigen matriks A	22
Tabel 4.2	Nilai eigen matriks A_s	25
Tabel 4.3	Nilai singular hankel(A_s, B_s, C_s, D_s).....	28
Tabel 4.4	Nilai eigen matriks A_{bal}	30
Tabel 4.5	Kesalahan reduksi dan batas atasnya.....	33

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam mempelajari berbagai fenomena alam dalam kehidupan sehari-hari khususnya dalam sains dan teknik akan lebih mudah untuk dipahami dengan menyatakannya dalam bentuk model matematika. Model matematika adalah representasi ideal dari sistem nyata yang dijabarkan atau dinyatakan dalam bentuk simbol dan pernyataan matematik. Dengan kata lain model matematika merepresentasikan sebuah sistem dalam bentuk hubungan kuantitatif dan logika, berupa suatu persamaan, pertidaksamaan, sistem persamaan atau lainnya yang terdiri atas sekumpulan variabel atau besaran dengan menggunakan operasi matematika matematika. Salah satu model yang sering digunakan adalah model dari suatu sistem linear, berupa sistem diskrit ataupun kontinu.

Sistem yang berhubungan dengan berbagai fenomena ada yang bersifat stabil dan tidak stabil. Sistem tidak stabil banyak ditemukan dalam berbagai kasus. Beberapa contoh sistem tidak stabil adalah pendulum terbalik, model-model untuk reaksi berantai atau pertumbuhan populasi dengan persediaan makanan yang tidak terbatas dan tidak adanya predator, model neraca keuangan bank $y[n] = 1,01y[n - 1] + x[n]$ dengan sejumlah simpanan awal $x[0]$ dan tidak ada penarikan kembali maka simpanan itu akan bertambah setiap bulan tanpa batasan karena pengaruh pembayaran bunga (Oppenheim dkk, 1997).

Perkembangan teknologi khususnya komputer meningkatkan penggunaan dan pemanfaatan pemodelan. Suatu sistem yang direpresentasikan dengan model matematika diubah kedalam instruksi dari suatu komputer sehingga sangat memungkinkan untuk memodelkan sistem dengan orde yang lebih besar dan kompleks dari yang sebelumnya. Kebutuhan akan model dengan tingkat keakurasian yang tinggi memunculkan berbagai persoalan diantara lamanya waktu komputasi dan memori yang besar, kesulitan dalam hal analisis, optimasi, dan desain kendali. Sehingga, dibutuhkan aproksimasi model dengan orde lebih kecil tanpa kesalahan yang

signifikan tetapi memiliki perilaku dinamikanya hampir sama dengan model awal. Model aproksimasi dengan orde yang lebih kecil dikenal dengan reduksi model.

Beberapa metodologi reduksi model yaitu berdasarkan *singular perturbation analysis*, *modal analysis*, dekomposisi nilai singular, metode krylov, dan kombinasi dekomposisi nilai singular dan metode krylov. Reduksi model berdasarkan dekomposisi nilai singular yaitu metode pemotongan setimbang dan aproksimasi norm hankel. Metode pemotongan setimbang merupakan metode reduksi model yang sering digunakan karena kesederhanaan metodenya dan dikonstruksi berdasarkan dekomposisi aljabar linear biasa. Selain itu, metode tersebut dipilih karena memiliki sifat diantaranya mempertahankan kestabilan, keterkendalian dan keteramatan dari sistem, serta memiliki batas eror global antara fungsi transfer dari sistem awal dan sistem dari model tereduksi (Dukic dan Saric, 2012)

Berdasarkan latar belakang di atas, pada penelitian ini akan dikaji mengenai reduksi model dari suatu sistem linear tidak stabil menggunakan metode pemotongan setimbang dan aplikasinya dalam menentukan kedalaman dan kecepatan aliran sungai. Simulasi dari model awal dan model tereduksi dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan diatas, rumusan masalah pada penelitian ini yaitu :

1. Bagaimana reduksi model dari suatu sistem linear tidak stabil menggunakan metode pemotongan setimbang?
2. Bagaimana analisa sifat model tereduksi dari suatu sistem linear tidak stabil menggunakan metode pemotongan setimbang?
3. Bagaimana simulasi model tereduksi pada studi kasus kedalaman aliran air sungai khususnya dalam hal keakurasian dan waktu komputasi ?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Reduksi model linear *time-invariant* sistem waktu diskrit tidak stabil.
2. Diterapkan pada model linear tidak stabil dengan studi kasus aliran sungai.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini yaitu

1. Mengetahui reduksi model dari suatu sistem linear tidak stabil menggunakan metode pemotongan setimbang.
2. Mengetahui sifat model tereduksi dari suatu sistem linear tidak stabil menggunakan metode pemotongan setimbang.
3. Memperoleh hasil simulasi model tereduksi pada studi kasus kedalaman aliran sungai khususnya dalam hal keakurasian dan waktu komputasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah menambah wawasan mengenai reduksi model untuk sistem tidak stabil dan penerapannya pada model matematika yang memiliki orde besar sehingga dapat mempermudah penghitungan dan analisa. Selain itu, kajian ini dapat menjadi rujukan atau referensi bagi instansi/lembaga tertentu seperti dinas pengairan untuk mendapatkan kedalaman aliran sungai pada titik tertentu, menentukan ketinggian air irigasi dll.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bab ini dibahas mengenai kajian pustaka berkaitan dengan penelitian-penelitian sebelumnya dan dasar-dasar teori yang dibutuhkan dalam penelitian ini yaitu pembahasan mengenai sistem linear dinamik mengenai sifat-sifat sistem dan reduksi model.

2.1 Penelitian-Penelitian Terkait

Penelitian-penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya yaitu sebagai berikut:

1. *Model Reduksi Menggunakan Linier Matriks Inequality (LMI) kasus waktu kontinu* (Jenizon dkk, 2003). Dalam penelitian ini membahas tentang hampiran model reduksi H_∞ dengan LMI waktu kontinu dan diskrit. Diperoleh kesimpulan bahwa hampiran model reduksi menggunakan LMI lebih baik dari pemotongan setimbang untuk $n = 0,1,2$.
2. *Reduksi Orde Plant dan Pengendali dengan Menggunakan Metode Pemotongan Setimbang* (Abdul Wachid dan Widowati, 2006). Dalam penelitian ini dibahas tentang masalah reduksi dalam rangka memperoleh pengendali berorde rendah dengan menggunakan dua cara. Cara pertama, plant berorde tinggi direduksi terlebih dahulu direduksi, kemudian suatu pengendali berorde rendah didesain dari plant tereduksi tersebut. Cara kedua, mula-mula dari plant berorde tinggi didesain pengendali berorde tinggi, kemudian orde pengendali ini direduksi. Cara pertama dan kedua tersebut dibandingkan, diperoleh bahwa cara kedua yaitu reduksi orde pengendali memberikan kinerja lebih baik dibandingkan cara pertama.
3. *Reduksi Orde Model Sistem Linear Parameter Varying Melalui Linear Matriks Inequalities* (Musthofa, 2007). Dalam penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwa pada sistem *linear parameter varying* yang stabil kuadratik metode pemotongan setimbang menghasilkan sistem tereduksi yang stabil kuadratik juga. Hasil simulasi menunjukkan perilaku masing-masing state pada kedua sistem tereduksi sesuai dengan sistem awal.

4. *Balanced Realization and Model Reduction for Unstable Systems* (Zhou dkk, 1999). Dalam penelitian ini, diperkenalkan realisasi setimbang dan metode reduksi model untuk sistem tidak stabil, dengan mendefinisikan gramian keterkendalian dan keteramatan yang baru. Diperoleh hasil bahwa metode ini lebih efektif dibanding *existing* metode.
5. *Reduction of Unstable Discrete Time Systems by Hankel Norm Approximation* (Kumar dkk, 2011). Dalam penelitian ini dibahas mengenai reduksi model pada sistem tak stabil menggunakan pendekatan norm hankel. Pada sistem tak stabil dilakukan pemisahan menjadi sub bagian sistem stabil dan tidak stabil dengan menggunakan algoritma dekomposisi. Kemudian, sub bagian sistem stabil direduksi menggunakan metode norm hankel. Diperoleh model akhir dengan cara menambahkan sub sistem tidak stabil dan sistem stabil tereduksi.
6. *Dynamic Model Reduction : An Overview of Available Techniques with Application to Power Systems* (Dukic dkk, 2012). Dalam penelitian ini dikaji metode reduksi yang paling sering digunakan yaitu metode pemotongan setimbang dan *modal truncation*. Metode tersebut diaplikasikan untuk mereduksi sistem daya dan generator. Metode pemotongan setimbang memotong 106 dari 109 variabel state, sedangkan *modal truncation* memotong hanya 77 variabel state yang kurang berpengaruh terhadap sistem, tetapi metode pemotongan setimbang tidak mempertahankan *steady state* dari model awal.
7. *Konstruksi dan Implementasi Algoritma Filter Kalman pada Model Tereduksi* (Arif, D.K, 2014). Dalam penelitian ini dijelaskan bahwa implementasi algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi pada masalah distribusi konduksi panas. Estimasi distribusi konduksi panas pada kawat dimensi satu ini merupakan salah satu contoh sistem yang berukuran besar. Hasil simulasi menunjukkan bahwa estimasi filter Kalman pada sistem tereduksi mempunyai hasil yang lebih akurat dan waktu komputasi yang lebih kecil jika dibandingkan dengan filter Kalman pada sistem semula.

2.2 Sistem Linear Dinamik

Suatu sistem linear dinamik waktu diskrit dinyatakan dalam bentuk persamaan sebagai berikut :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan :

$x_k \in \mathbb{R}^n$: Vektor keadaan / *state* pada waktu k (n -vektor)

$u_k \in \mathbb{R}^m$: Vektor kendali (m -vektor)

$y_k \in \mathbb{R}^p$: Vektor keluaran (p -vektor)

A : matriks sistem ukuran $n \times n$

B : matriks input ukuran $n \times m$

C : matriks output ukuran $p \times n$

D : matriks input-output ukuran $p \times m$

Dimensi atau orde dari model didefinisikan dengan banyaknya state yaitu berkaitan dengan ukuran n dari matriks A . Sistem dengan A, B, C , dan D adalah matriks konstan dinamakan sistem linear invarian waktu.

Sistem dinamik dengan $m = 1$ dan $p = 1$ dinamakan SISO (*Single Input Single Output*), sedangkan sistem dengan ukuran m dan p lainnya dinamakan MIMO (*Multiple Input and Multiple Output*). Sistem yang direpresentasikan oleh persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk (A, B, C, D)

2.2.1 Sifat-Sifat Sistem

A. Kestabilan

Diantara cara menentukan kestabilan suatu sistem yaitu kestabilan berdasarkan nilai karakteristik atau nilai eigen dari suatu matriks sistem.

Definisi 2.1

Untuk suatu matriks persegi A , terdapat vektor tak nol x dan suatu skalar λ sehingga $Ax = \lambda x, x \neq 0$. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan vektor $x \neq 0$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks persegi A , tulis $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan $(A - \lambda I)x = 0$. Untuk nilai eigen λ , persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I) = 0$ dan disebut persamaan karakteristik matriks A . (Anton dan Rorres, 2013)

Definisi 2.2 (Ogata, 1997)

Diberikan sistem linear diskrit

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (2.2)$$

dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keadaan pada waktu k dan A adalah matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian. Misalkan x_e disebut titik setimbang.

1. Titik setimbang x_e dikatakan stabil bila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi x_k yang memenuhi $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ maka berlaku $\|x_k - x_e\| \leq \varepsilon$ untuk setiap $k \geq 0$.
2. Titik setimbang x_e dikatakan stabil asimtotik jika x_e stabil dan bila terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap solusi x_k yang memenuhi $\|x_0 - x_e\| \leq \delta_1$ maka berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_k - x_e\| = 0$.

Berdasarkan Definisi 2.2, maka untuk menyelidiki kestabilan sistem diskrit (A, B, C, D) dapat dilihat dari penyelesaian Persamaan (2.1).

Teorema berikut memberikan syarat kestabilan berdasarkan nilai karakteristik.

Teorema 2.1 (Paraskevopoulos, 1996; Ogata, 1997)

Sistem linear diskrit, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (2.1), adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $|\lambda_i(A)| < 1$ untuk $i = 1, \dots, n$ dengan $\lambda_i(A)$ adalah nilai eigen matriks A . Sedangkan jika $|\lambda_i(A)| \leq 1$, maka sistem diskrit adalah stabil.

Pada suatu sistem, selain kestabilan sistem dapat diketahui juga keterkendalian dan keteramatan dari sistem melalui matriks *state space* yang merepresentasikan sistem.

B. Keterkendalian

Berikut ini dijelaskan mengenai pengertian dari keterkendalian dan teorema yang diperlukan.

Definisi 2.3 (Paraskevopoulos, 1996)

Sistem linear (2.1) atau (A, B) dikatakan terkendali, jika untuk sebarang keadaan awal x_0 dan keadaan akhir x_q , ada suatu barisan kendali $\{u(0), u(1), \dots, u(q-1)\}$ yang dapat mentrasfer sistem dari x_0 ke x_q . Selain itu, sistem dikatakan tidak terkendali.

Dari sistem linear (2.1) dan definisi 2.2 dapat diperoleh syarat perlu dan cukup sistem terkendali sebagai berikut.

Teorema 2.2 (Paraskevopoulos, 1996)

Syarat perlu dan cukup sebuah sistem terkendali adalah :

1. $\text{rank } M_C = n$ dimana $M_C = [B | AB | \dots | A^{n-1}B]$
2. $\text{rank } [A - \lambda I \quad B] = n$ untuk setiap nilai eigen λ dari A

Matriks M_C disebut matriks keterkendalian

C. Keteramatan

Berikut ini dijelaskan mengenai pengertian dari keteramatan dan teorema yang diperlukan.

Definisi 2.4 (Paraskevopoulos, 1996)

Sistem linear (2.1) atau (A, C) dikatakan teramati, jika dalam batasan waktu q pada basis masukan barisan $\{u(0), u(1), \dots, u(q-1)\}$ dan keluaran barisan $\{y(0), y(1), \dots, y(q-1)\}$ dapat ditentukan keadaan awal dari sistem. Selain itu, sistem dikatakan tidak teramati.

Dari sistem linear (2.1) dan definisi 2.3 dapat diperoleh syarat perlu dan cukup sistem teramati sebagai berikut.

Teorema 2.3 (Paraskevopoulos, 1996)

Syarat perlu dan cukup sebuah sistem teramati adalah :

1. $\text{rank } M_o = n$ dimana $M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$
2. $\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$ untuk setiap nilai eigen λ dari A

Matriks M_o disebut matriks keteramatan.

2.3 Operator Gabungan Realisasi Sistem**Definisi 2.5** Operator +

Misalkan G_1 dan G_2 masing-masing adalah realisasi dari sistem (A_1, B_1, C_1, D_1) , (A_2, B_2, C_2, D_2) dan orde dari sistem m dan n . Dengan elemen matriksnya sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}^T, D_1 = (d_1)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}^T, D_2 = (0)$$

Operator + pada persamaan $G = G_1 + G_2$ merupakan gabungan dari realisasi sistem G_1 dan G_2 , realisasi gabungan G yaitu (A, B, C, D) berorde $(m + n)$ dengan elemen matriksnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}^T, D = (d_1)$$

2.4 Reduksi Model

Reduksi model dari suatu sistem adalah aproksimasi dari suatu sistem dengan orde lebih rendah tanpa kesalahan yang signifikan tetapi memiliki perilaku dinamikanya hampir sama dengan sistem awal.

Misalkan diberikan suatu sistem G , seperti yang dinyatakan pada Persamaan (2.1) yang memiliki sifat tidak stabil, selanjutnya disebut sebagai sistem awal (A, B, C, D) . Reduksi model untuk suatu sistem tidak stabil diperoleh dengan terlebih dahulu sistem didekomposisi menjadi sub sistem stabil asimtotik G_s dan sub sistem tidak stabil G_u . Kemudian ditentukan realisasi minimal dari sistem G_s sehingga diperoleh sistem G_s yang bersifat stabil asimtotik, terkendali dan teramati, maka Gramian keterkendalian W , dan Gramian keteramatan M , masing-masing adalah definit positif. Pada sistem (A, B, C, D) diterapkan metode pemotongan setimbang untuk mendapatkan sistem tereduksi.

Arif (2014), Dukic dan Saric (2012) menjelaskan bahwa metode pemotongan setimbang terdiri dari tiga langkah utama yaitu menyetimbangkan sistem sehingga diperoleh realisasi setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$, sistem disetimbangkan menggunakan suatu transformasi sehingga diperoleh Gramian keterkendalian \tilde{W} dan Gramian keteramatan \tilde{M} , yang sama dengan matriks diagonal Σ , dengan

$$\sigma_1 \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \dots \geq \sigma_m, \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\tilde{M}\tilde{W})}$$

Kemudian berikutnya sistem setimbang dipartisi bersesuaian dengan Gramian $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, dimana $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ dan $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_m)$ dengan $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$. Langkah terakhir, dilakukan pemotongan variabel *state* pada realisasi setimbang tersebut sebanyak $(m - r)$ variabel yang bersesuaian dengan nilai singular hankel yang kecil, sehingga diperoleh sistem tereduksi $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, D_r)$ dengan persamaan dinamik sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_{srk+1} &= \tilde{A}_{sr} \tilde{x}_{srk} + \tilde{B}_{sr} \tilde{u}_k \\ \tilde{y}_{srk} &= \tilde{C}_{sr} \tilde{x}_{srk} + D_{sr} \tilde{u}_k \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

dengan $\tilde{A}_{sr} = \tilde{A}_{11}$, $\tilde{B}_{sr} = \tilde{B}_1$, $\tilde{C}_{sr} = \tilde{C}_1$, $D_{sr} = D$.

Sedangkan, besarnya kesalahan reduksi dari metode pemotongan setimbang dinyatakan dalam norm dari fungsi transfer berikut ini.

Teorema 2.3 (Green, 1995) Jika $G_m(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ dengan (A, B, C, D) realisasi setimbang dan terpartisi. Misalkan (A_{11}, B_1, C_1, D) adalah pemotongan setimbang dari (A, B, C, D) dengan $G_{sr}(s) = C_1(sI_{sr} - A_{11})^{-1}B_1 + D$ maka $\|G_m(s) - G_{sr}(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_m) = 2\text{tr}\Sigma_2$.

Model akhir tereduksi diperoleh dengan menggabungkan kembali sub sistem stabil tereduksi dan sub sistem tidak stabil.

$$G_r = G_{sr} + G_u$$

Dengan

G_{sr} : sistem stabil tereduksi.

G_u : sistem tak stabil dari dekomposisi.

Operator ‘+’ adalah gabungan dari realisasi sistem.

2.4.1 Contoh Sistem Tidak Stabil dan Reduksinya

Berikut ini merupakan contoh sistem waktu diskrit tidak stabil (Al-Saggaf, 1992)

:

$$G(z) = \frac{2.2256(z - 2.0395)(z - 0.3460)(z + 0.3797)}{(z - 1.755)(z - 0.8605)[(z + 0.5566)^2 + 0.1404^2]}$$

Dari sistem tersebut diperoleh tiga nilai eigen yang stabil yaitu $-0.5566 \pm j0.1404$, 0.8605 dan satu nilai eigen yang tidak stabil yaitu 1.7550. Sistem diatas dapat dituliskan bentuk ruang keadaan sebagai berikut :

$$G = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -0.5566 & 1.0000 & -1.2472 & -0.8536 & 0 \\ -0.0197 & -0.5566 & 0.8283 & 0.5669 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7550 & 1.4611 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8605 & 2.9837 \\ \hline 3.0574 & 0 & 1.0898 & 0.7459 & 0 \end{array} \right)$$

Kemudian sistem didekomposisi menjadi sub sistem stabil G_s dan sub sistem tidak stabil G_u .

$$G_s = \left(\begin{array}{ccc|c} -0.5566 & -0.0197 & -0.4089 & -1.762 \\ 1.0000 & -0.5566 & 0.6180 & 1.867 \\ 0 & 0 & 0.8605 & 5.714 \\ \hline 0 & 3.057 & -0.5400 & 0 \end{array} \right), G_u = \left(\begin{array}{c|c} 1.7550 & 2.545 \\ \hline -0.1562 & 0 \end{array} \right)$$

Nilai singular Hankel dari sub sistem stabil yaitu 4,1693, 2,4937 dan 0,1745. Berdasarkan nilai singular Hankel tersebut, maka sub sistem stabil dapat direduksi menjadi sistem yang berorde dua. Diperoleh sistem akhir tereduksi dengan menggabungkan kembali sub sistem stabil tereduksi dan sub sistem tidak stabil sebagai berikut ini.

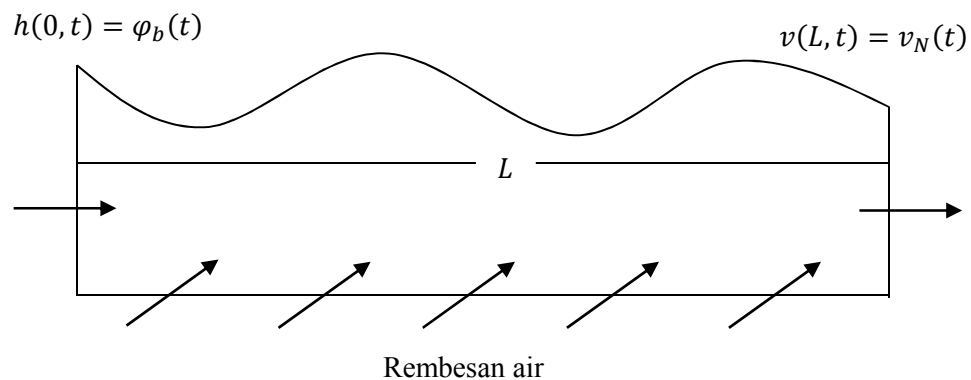
$$G_{s,hna} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0,309 & 0,4436 & 0 & -0,3878 \\ 1,244 & -0,1243 & 0 & 0,2213 \\ 0 & 0 & 1,755 & 2,545 \\ \hline -6,729 & 1,373 & -0,1562 & 0,1745 \end{array} \right)$$

(Kumar dkk, 2011)

2.5 Pemodelan Aliran Air Sungai

Pada penelitian ini akan diambil contoh penerapan pada masalah aliran air sungai. Diasumsikan terdapat suatu sungai dengan kondisi ideal yang mempunyai panjang L dan lebar B . Dalam pembahasan ini diasumsikan bahwa panjang sungai jauh lebih besar jika dibandingkan dengan lebar sungainya. Sehingga dalam masalah ini dapat didekati dengan model aliran dangkal berdimensi satu.

Masalah aliran sungai dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 : Gambar dari pemodelan aliran air sungai

Masalah aliran air sungai yang digunakan dalam penelitian ini merupakan masalah aliran sungai dangkal (*shallow water problem*). Masalah ini dapat dimodelkan sebagai persamaan Saint Venant (Verlaan, 1998) sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + D \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + C_f u = 0 \quad (2.5)$$

dengan syarat awal dan syarat batas:

$$h(x, 0) = 1, v(x, 0) = 0, h(0, t) = \psi_b(t), v(L, t) = v_N(t) \quad (2.6)$$

dengan

$h(x, t)$: ketinggian air terhadap titik acuan

v : kecepatan rata-rata pada posisi x dan waktu t

D : kedalaman sungai terhadap titik acuan

t : waktu

x : posisi sepanjang sungai

g : gaya gravitasi

C_f : koefisien gesekan

ψ_b : ketinggian air pada posisi x_0

$v(L, t)$: kecepatan aliran pada batas x_N

BAB 3

METODE PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode yang akan digunakan pada penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian ini dapat disusun secara sistematis.

3.1 Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan metode penelitian berdasarkan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan cara mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa tugas akhir, jurnal, buku, disertasi maupun artikel terkait yang berhubungan dengan permasalahan pada penelitian ini.

2. Analisis Model Awal

Setelah tahap studi literatur, tahap kedua yang dilakukan adalah analisa model awal sistem. Analisa yang dimaksud meliputi analisa sifat dan perilaku sistem. Seperti analisa kestabilan, keterkendalian dan keteramatan pada sistem tersebut.

3. Dekomposisi Sub Sistem Stabil Asimtotik dan Sub Sistem Tidak Stabil

Pada tahap ini untuk sistem tidak stabil dilakukan dekomposisi, sehingga sistem terbagi menjadi dua yaitu sub sistem stabil dan sub sistem tak stabil.

4. Reduksi Model pada Sistem Stabil

Pada tahap ini dilakukan reduksi model dari sub sistem stabil dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang agar menghasilkan model tereduksi dari sub sistem stabil. Metode pemotongan setimbang terdiri dari tiga tahap yaitu membentuk sistem setimbang, partisi sistem setimbang, dan pemotongan *state* dengan membuang variabel *state* yang pengaruh atau kontribusinya terhadap sistem kurang signifikan.

5. Analisa Sifat Model Tereduksi

Setelah mendapatkan sistem tereduksi dari sub sistem stabil, berikutnya dilakukan adalah analisa sifat sistem tersebut berupa analisa kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Karena reduksi model dilakukan dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang sehingga seharusnya sifat model tereduksi dari sub sistem stabil sama dengan sifat model sub sistem stabil tanpa ada kesalahan yang signifikan, atau dengan kata lain model tereduksi tersebut juga bersifat stabil, terkendali dan teramati.

6. Model Akhir Tereduksi

Pada tahap ini dilakukan penggabungan kembali sub sistem stabil tereduksi dan sub sistem tidak stabil. Melalui *step responses* dari model dapat dibandingkan grafik model akhir tereduksi dan model awal.

7. Studi Kasus, Simulasi dan Hasil Analisis

Studi kasus dipilih model aliran sungai Saint Venant yaitu persamaan (2.4) dan (2.5). Model aliran sungai tersebut merupakan model dengan waktu kontinu sehingga terlebih dahulu dilakukan pendiskritan, selanjutnya adalah simulasi dan analisis model awal dan model akhir tereduksi dengan menggunakan software MATLAB. Dari output MATLAB juga dapat diketahui sifat dari masing-masing model.

8. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dan saran berdasarkan pada hasil simulasi dan analisis pada tahap sebelumnya.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model aliran sungai (*shallow water problem*) persamaan Saint Venant merupakan model dengan waktu kontinu sehingga terlebih dahulu dilakukan diskritisasi model.

4.1 Diskritisasi Model

Sebelum dilakukan reduksi pada model aliran air sungai persamaan Saint Venant (2.4) dan (2.5), terlebih dahulu dilakukan pendiskritan sistem terhadap ruang x dan waktu t , pada kasus ini digunakan pendiskritan implisit skema Preissman. Menurut pendiskritan implisit skema Preissman didefinisikan untuk sebarang fungsi f sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \left(\frac{f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1}}{\Delta x} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i+1}^k}{2\Delta t} \right) + \left(\frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{2\Delta t} \right) \quad (4.2)$$

$$f = \frac{\theta}{2} (f_{i+1}^{k+1} + f_i^{k+1}) + \frac{(1-\theta)}{2} (f_{i+1}^k + f_i^k) \quad (4.3)$$

untuk $0 < \theta < 1$.

Pendiskritan implisit skema Preissman tersebut dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \theta \left(\frac{v_{i+1}^{k+1} - v_i^{k+1}}{\Delta x} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{v_{i+1}^k - v_i^k}{\Delta x} \right) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{h_{i+1}^{k+1} - h_{i+1}^k}{2\Delta t} \right) + \left(\frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{2\Delta t} \right) \quad (4.6)$$

Dengan menggunakan pendiskritan implisit skema Preissman tersebut, maka persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai persamaan beda hingga berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + D \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{h_{i+1}^{k+1} - h_{i+1}^k}{2\Delta t} + \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{2\Delta t} \right) + D \left(\theta \left(\frac{v_{i+1}^{k+1} - v_i^{k+1}}{\Delta x} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{v_{i+1}^k - v_i^k}{\Delta x} \right) \right) &= 0 \\ \frac{h_{i+1}^{k+1} - h_{i+1}^k}{2\Delta t} + \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{2\Delta t} + \frac{D\theta}{\Delta x} (u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}) + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} (u_{i+1}^k - u_i^k) &= 0 \\ \frac{h_{i+1}^{k+1}}{2\Delta t} - \frac{h_{i+1}^k}{2\Delta t} + \frac{h_i^{k+1}}{2\Delta t} - \frac{h_i^k}{2\Delta t} + \frac{D\theta}{\Delta x} v_{i+1}^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_i^{k+1} + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_{i+1}^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_i^k &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} h_{i+1}^{k+1} - \frac{1}{2\Delta t} h_{i+1}^k + \frac{1}{2\Delta t} h_i^{k+1} - \frac{1}{2\Delta t} h_i^k + \frac{D\theta}{\Delta x} v_{i+1}^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_i^{k+1} + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_{i+1}^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_i^k &= 0 \\ \frac{1}{2\Delta t} h_i^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_i^{k+1} + \frac{1}{2\Delta t} h_{i+1}^{k+1} + \frac{D\theta}{\Delta x} v_{i+1}^{k+1} &= \frac{1}{2\Delta t} h_i^k + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_i^k + \frac{1}{2\Delta t} h_{i+1}^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_{i+1}^k \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sedangkan dari persamaan (2.5) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + C_f v &= 0 \\ \left(\frac{v_{i+1}^{k+1} - v_{i+1}^k}{2\Delta t} + \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{2\Delta t} \right) + g \left(\theta \left(\frac{h_{i+1}^{k+1} - h_i^{k+1}}{\Delta x} \right) + (1-\theta) \left(\frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{\Delta x} \right) \right) + \\ C_f \left(\frac{\theta}{2} (v_{i+1}^{k+1} + v_i^{k+1}) + \frac{(1-\theta)}{2} (v_{i+1}^k + v_i^k) \right) &= 0 \\ \frac{v_{i+1}^{k+1} - v_{i+1}^k}{2\Delta t} + \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{2\Delta t} + \frac{g\theta}{\Delta x} (h_{i+1}^{k+1} - h_i^{k+1}) + \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} (h_{i+1}^k - h_i^k) + \\ \frac{C_f\theta}{2} (v_{i+1}^{k+1} + v_i^{k+1}) + \frac{C_f(1-\theta)}{2} (v_{i+1}^k + v_i^k) &= 0 \\ \frac{v_{i+1}^{k+1}}{2\Delta t} - \frac{v_{i+1}^k}{2\Delta t} + \frac{v_i^{k+1}}{2\Delta t} - \frac{v_i^k}{2\Delta t} + \frac{g\theta}{\Delta x} h_{i+1}^{k+1} - \frac{g\theta}{\Delta x} h_i^{k+1} + \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_{i+1}^k - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_i^k + \\ \frac{C_f\theta}{2} v_{i+1}^{k+1} + \frac{C_f\theta}{2} v_i^{k+1} + \frac{C_f(1-\theta)}{2} v_{i+1}^k + \frac{C_f(1-\theta)}{2} v_i^k &= 0 \\ -\frac{g\theta}{\Delta x} h_i^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_i^{k+1} + \frac{g\theta}{\Delta x} h_{i+1}^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_{i+1}^{k+1} = \\ \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_i^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_i^k - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_{i+1}^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_{i+1}^k \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kemudian dari persamaan (4.7) dan (4.8) digerakkan dari $i = 0$ sampai $i = N$, dengan $N = 5$ sebagai berikut :

Untuk $i = 0$,

pada persamaan (4.7) berlaku syarat awal $h_i^0 = 1$ dan $u_i^0 = 0$ sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$h_0^k = \psi_b(k\Delta t),$$

$$h_0^{k+1} = \psi_b((k+1)\Delta t) = a_0 \psi_b(k\Delta t) = a_0 h_0^k \text{ dengan } \psi_b(0) = 1, a_0 = e^{-1/6}$$

kemudian, persamaan (4.8) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} -\frac{g\theta}{\Delta x} h_0^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_0^{k+1} + \frac{g\theta}{\Delta x} h_1^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_1^{k+1} = \\ \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_0^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_0^k - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_1^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_1^k \end{aligned}$$

Untuk $i = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} h_1^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_1^{k+1} + \frac{1}{2\Delta t} h_2^{k+1} + \frac{D\theta}{\Delta x} v_2^{k+1} &= \frac{1}{2\Delta t} h_1^k + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_1^k + \frac{1}{2\Delta t} h_2^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_2^k \\ - \frac{g\theta}{\Delta x} h_1^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_1^{k+1} + \frac{g\theta}{\Delta x} h_2^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_2^{k+1} &= \\ \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_1^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_1^k - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_2^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_2^k \end{aligned}$$

Untuk $i = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} h_2^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_2^{k+1} + \frac{1}{2\Delta t} h_3^{k+1} + \frac{D\theta}{\Delta x} v_3^{k+1} &= \frac{1}{2\Delta t} h_2^k + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_2^k + \frac{1}{2\Delta t} h_3^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_3^k \\ - \frac{g\theta}{\Delta x} h_2^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_2^{k+1} + \frac{g\theta}{\Delta x} h_3^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_3^{k+1} &= \\ \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_2^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_2^k - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_3^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_3^k \end{aligned}$$

Untuk $i = 3$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} h_3^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_3^{k+1} + \frac{1}{2\Delta t} h_4^{k+1} + \frac{D\theta}{\Delta x} v_4^{k+1} &= \frac{1}{2\Delta t} h_3^k + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_3^k + \frac{1}{2\Delta t} h_4^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_4^k \\ - \frac{g\theta}{\Delta x} h_3^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_3^{k+1} + \frac{g\theta}{\Delta x} h_4^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_4^{k+1} &= \\ \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_3^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_3^k - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_4^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_4^k \end{aligned}$$

Untuk $i = 4$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} h_4^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_4^{k+1} + \frac{1}{2\Delta t} h_5^{k+1} + \frac{D\theta}{\Delta x} v_5^{k+1} &= \frac{1}{2\Delta t} h_4^k + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_4^k + \frac{1}{2\Delta t} h_5^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_5^k \\ - \frac{g\theta}{\Delta x} h_4^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_4^{k+1} + \frac{g\theta}{\Delta x} h_5^{k+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{C_f\theta}{2} \right) v_5^{k+1} &= \\ \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_4^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_4^k - \frac{g(1-\theta)}{\Delta x} h_5^k + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{C_f(1-\theta)}{2} \right) v_5^k \end{aligned}$$

Untuk $i = 5$, , pada persamaan (4.7) berlaku persamaan batas $u_N^k = u_N$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} h_5^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_5^{k+1} + \frac{1}{2\Delta t} h_6^{k+1} + \frac{D\theta}{\Delta x} v_6^{k+1} &= \frac{1}{2\Delta t} h_5^k + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_5^k + \frac{1}{2\Delta t} h_6^k - \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_6^k \\ \frac{1}{2\Delta t} h_5^{k+1} - \frac{D\theta}{\Delta x} v_5^{k+1} &= \frac{1}{2\Delta t} h_5^k + \frac{D(1-\theta)}{\Delta x} v_5^k \end{aligned}$$

persamaan (4.8) digunakan sebagai input dari sistem, yaitu

$$v_5^{k+1} = u(k)$$

[illegible]
$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$
[illegible][illegible]

Selanjutnya dibentuk model pengukuran untuk menemukan kedalaman sungai pada posisi ke $i = 0$ sebagai variabel pengukurannya sehingga dapat ditulis model pengukurannya sebagai berikut :

$$y_k = Cx_k$$

dengan $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

Akhirnya diperoleh persamaan awal sistem linear berikut ini :

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Selanjutnya pada simulasi dengan menggunakan nilai parameter berikut ini:

$L = 30 \text{ km}$ (panjang sungai)

$D = 10 \text{ m}$ (kedalaman sungai terhadap acuan)

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$ (percepatan gravitasi)

$C_f = 0.0002$ (koefisien gesekan)

$\theta = 0.3$

$\Delta t = 10s$

diperoleh matriks awal sistem (A, B, C, D) berorde $n = 12$ sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 0.8465 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0311 & 0.9980 & -0.0653 & -0.0007 & 0.0653 & 0.0020 & -0.0654 & -0.0033 & 0.0655 & 0.0046 & -0.0327 & 0.9972 \\ 0 & 0 & 1.0003 & 0.0333 & -0.0013 & -0.0666 & 0.0026 & 0.0667 & -0.0039 & -0.0668 & 0.0023 & -0.0231 \\ 0 & 0 & 0.0327 & 0.9983 & -0.0653 & -0.0013 & 0.0654 & 0.0026 & -0.0654 & -0.0039 & 0.0327 & -0.9970 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0003 & 0.0333 & -0.0013 & -0.0666 & 0.0026 & 0.0667 & -0.0016 & 0.0032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0327 & 0.9983 & -0.0653 & -0.0013 & 0.0654 & 0.0026 & -0.0327 & 0.9968 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0003 & 0.0333 & -0.0013 & -0.0666 & 0.0010 & 0.0167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0327 & 0.9983 & -0.0653 & -0.0013 & 0.0327 & -0.9969 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0003 & 0.0333 & -0.0003 & -0.0367 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0327 & 0.9983 & -0.0327 & 0.9974 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0.0233 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,0005 \ 0,05 \ -0,0005 \ 1]^T,$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ dan } D = [0]$$

4.2 Sifat Sistem Awal

Sebelum dilakukan reduksi terhadap sistem awal (A, B, C, D) diatas, dicek terlebih dahulu kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem. Kestabilan sitem dapat ditentukan berdasarkan nilai absolut dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4. 1 Nilai eigen matriks A

i	$ \lambda_i $
1	1.0323
2	1.0323
3	1.0323
4	1.0323
5	1
6	0,9980
7	0.9663
8	0.9663
9	0.9663
10	0.9663
11	0.8465
12	0

Berdasarkan teorema 2.1, Dari tabel 4.1 diketahui bahwa terdapat $|\lambda_i(A)| > 1$ sehingga sistem sistem tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keterkendalian berikut.

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9975 & 1.0044 & 1.0468 & 1.1246 & 1.2380 & 1.3874 & 1.5736 & 1.7974 & 2.0600 & 2.3627 & 2.7072 \\ 0 & -0.0265 & -0.2623 & -0.4984 & -0.7371 & -0.9808 & -1.2317 & -1.4923 & -1.7648 & -2.0519 & -2.3558 & -2.6791 \\ 0 & -0.9973 & -1.0010 & -1.0325 & -1.0917 & -1.1787 & -1.2938 & -1.4374 & -1.6101 & -1.8126 & -2.0459 & -2.3109 \\ 0 & 0.0065 & 0.1759 & 0.3450 & 0.5148 & 0.6862 & 0.8602 & 1.0376 & 1.2194 & 1.4067 & 1.6002 & 1.8010 \\ 0 & 0.9969 & 0.9956 & 1.0089 & 1.0366 & 1.0787 & 1.1354 & 1.2068 & 1.2929 & 1.3940 & 1.5103 & 1.6422 \\ 0 & 0.0134 & -0.0895 & -0.1922 & -0.2948 & -0.3977 & -0.5011 & -0.6052 & -0.7104 & -0.8169 & -0.9249 & -1.0347 \\ 0 & -0.9970 & -0.9933 & -0.9952 & -1.0027 & -1.0158 & -1.0345 & -1.0589 & -1.0888 & -1.1244 & -1.1658 & -1.2128 \\ 0.0005 & -0.0345 & 0.0004 & 0.0351 & 0.0698 & 0.1045 & 0.1391 & 0.1739 & 0.2086 & 0.2436 & 0.2786 & 0.3139 \\ 0.0500 & 1.0474 & 1.0438 & 1.0413 & 1.0399 & 1.0397 & 1.0407 & 1.0427 & 1.0459 & 1.0502 & 1.0557 & 1.0623 \\ -0.0005 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 & 0.0228 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks keterkendalian M_c diketahui bahwa rank M_c adalah 10, maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem awal (A, B, C, D) tidak terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keteramatan M_O .

$$M_O = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0311 & 0.9980 & -0.0653 & -0.0007 & 0.0653 & 0.0020 & -0.0654 & -0.0033 & 0.0655 & 0.0046 & -0.0327 & 0.9972 \\ 0.0574 & 0.9960 & -0.1305 & -0.0035 & 0.1307 & 0.0104 & -0.1312 & -0.0174 & 0.1318 & 0.0244 & -0.0661 & 1.0031 \\ 0.0796 & 0.9940 & -0.1957 & -0.0085 & 0.1966 & 0.0254 & -0.1983 & -0.0424 & 0.2009 & 0.0595 & -0.1012 & 1.0437 \\ 0.0984 & 0.9920 & -0.2610 & -0.0156 & 0.2632 & 0.0469 & -0.2677 & -0.0784 & 0.2745 & 0.1102 & -0.1393 & 1.1188 \\ 0.1142 & 0.9900 & -0.3263 & -0.0249 & 0.3310 & 0.0750 & -0.3404 & -0.1255 & 0.3544 & 0.1768 & -0.1813 & 1.2288 \\ 0.1275 & 0.9881 & -0.3919 & -0.0364 & 0.4003 & 0.1096 & -0.4171 & -0.1838 & 0.4424 & 0.2599 & -0.2286 & 1.3741 \\ 0.1387 & 0.9861 & -0.4577 & -0.0501 & 0.4714 & 0.1509 & -0.4989 & -0.2537 & 0.5404 & 0.3600 & -0.2824 & 1.5551 \\ 0.1481 & 0.9841 & -0.5239 & -0.0659 & 0.5448 & 0.1988 & -0.5868 & -0.3354 & 0.6503 & 0.4781 & -0.3437 & 1.7730 \\ 0.1560 & 0.9822 & -0.5905 & -0.0839 & 0.6207 & 0.2536 & -0.6816 & -0.4293 & 0.7740 & 0.6151 & -0.4141 & 2.0286 \\ 0.1626 & 0.9802 & -0.6576 & -0.1040 & 0.6996 & 0.3152 & -0.7845 & -0.5358 & 0.9135 & 0.7721 & -0.4947 & 2.3234 \\ 0.1682 & 0.9782 & -0.7252 & -0.1264 & 0.7818 & 0.3839 & -0.8963 & -0.6554 & 1.0710 & 0.9505 & -0.5869 & 2.6589 \end{pmatrix}$$

Dari matriks keterkendalian M_O diketahui bahwa rank M_O adalah 11, maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem awal (A, B, C, D) tidak teramati.

Dalam metode pemotongan setimbang, sistem awal bersifat stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Sehingga untuk sistem (A, B, C, D) dengan sifat sistem diketahui tidak stabil terlebih dahulu dilakukan dekomposisi sistem menjadi sub sistem stabil asimtotik G_s dan sub sistem tidak stabil G_u . Berikutnya, untuk sub sistem stabil asimtotik G_s digunakan realisasi minimal dari sistem untuk mendapatkan sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati.

4.3 Dekomposisi Sistem

Pada sub bagian ini akan dilakukan dekomposisi terhadap sistem (4.9). Berdasarkan nilai eigen dari matriks A. Sistem didekomposisi menjadi sub sistem stabil dan sub sistem tidak stabil menggunakan algoritma dekomposisi (Nagar dan Singh, 2004) sebagai berikut :

1. Sistem ditransformasi menggunakan matriks uniter U menjadi bentuk Schur blok diagonal atas. Jika x merupakan keadaan awal sistem, maka matriks uniter U merupakan tahap transformasi pertama dan x_t menotasikan keadaan sistem setelah transformasi, dituliskan dalam bentuk relasi $x = Ux_t$.

$$G_t = \left(\begin{array}{c|c} U'AU & U'B \\ \hline CU & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_t & B_t \\ \hline C_t & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{t11} & A_{t12} \\ \hline 0 & A_{t22} \end{array} \begin{array}{c} B_{t1} \\ B_{t2} \\ \hline D \end{array} \right) \quad (4.10)$$

2. Pada sistem (4.10) masih terdapat bentuk A_{t12} , sehingga sistem tidak dapat langsung didekomposisi. Dengan menyelesaikan bentuk umum dari persamaan Lyapunov :

$$A_{t11}S - SA_{t22} + A_{t12} = 0$$

Matriks S digunakan dalam membentuk matriks transformasi W . Kemudian, dilakukan transformasi tahap kedua $x_t = WX$ dengan X adalah hasil akhir transformasi dan W adalah matriks transformasi tahap kedua.

$W = \left(\begin{array}{c|c} I_m & S \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array} \right)$ Dengan I_m dan I_{n-m} adalah matriks identitas berukuran m dan $n-m$. Sehingga sistem dapat didekomposisi sebagai berikut :

$$G_d = \left(\begin{array}{c|c} W^{-1}A_tW & W^{-1}B_t \\ \hline C_tW & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \middle| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \hline D \end{array} \right)$$

Dimana :

$$A_t = U'AU, B_t = U'B \text{ dan } C_t = CU.$$

$$A_{11} \in R^{m \times m}, A_{22} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$$

Sistem hasil transformasi tersebut dibentuk menjadi sub sistem stabil asimtotik dan sub sistem tidak stabil. Dalam hal ini, sub sistem dengan $\lambda_i = 1$ dikategorikan kedalam sub sistem tidak stabil.

$$G_d = G_s (\text{sub sistem stabil asimtotik}) + G_u (\text{sub sistem tidak stabil})$$

$$G_d = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} A_{22} & B_2 \\ \hline C_2 & 0 \end{array} \right)$$

$$G_d = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0.9980 & -0.0000 & -0.0022 & 0.0014 & 0.0002 & -0.0009 & -0.0044 & -0.0041 \\ 0 & 0.8465 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9663 & -0.0353 & -0.0172 & -0.0155 & -0.0071 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9663 & -0.0325 & -0.0294 & -0.0147 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9663 & -0.0593 & -0.0272 & 0.0008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9663 & -0.0330 & -0.0245 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.000 \\ \hline -17.3644 & -0.0000 & -7.0040 & 2.4502 & -0.9750 & 1.4097 & 0.0156 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccccc|c} 1.0323 & -0.0620 & 0.0321 & -0.0174 & 0.0009 & & & -0.2121 \\ 0 & 1.0323 & -0.0342 & 0.0185 & -0.0006 & & & 0.2363 \\ 0 & 0 & 1.0323 & -0.0368 & -0.0009 & & & -0.5164 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0323 & -0.0014 & & & 0.9656 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & & & 0.0950 \\ \hline -3.7625 & -3.2642 & -1.5663 & -0.8370 & -3.2687 & & & 0 \end{array} \right)$$

Sub sistem stabil asimtotik G_s berorde 7, sedangkan sub sistem tidak stabil G_u berorde 5.

4.4 Reduksi Sub Sistem Stabil Asimtotik

Reduksi sistem dengan metode pemotongan setimbang diterapkan pada sub sistem stabil asimtotik G_s . Sebelum metode reduksi diterapkan, diperiksa terlebih dahulu kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sub sistem stabil asimtotik G_s . Kestabilan sistem G_s dapat ditentukan berdasarkan nilai absolut dari eigen matriks A_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.2.

Tabel 4. 2 Nilai eigen matriks A_s

i	$ \lambda_i $
1	0.9980
2	0.9663
3	0.9663
4	0.9663
5	0.9663
6	0.8465
7	0

Berdasarkan Tabel 4.2. terlihat bahwa semua nilai absolut dari nilai eigen matriks A_s adalah bernilai kurang dari 1, sehingga sistem G_s adalah sistem yang stabil asimtotik. Keterkendalian sistem stabil asimtotik G_s dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keterkendalian sebagai berikut.

$$M_{C-Gs} = \begin{pmatrix} -0.0041 & -0.0748 & -0.0744 & -0.0740 & -0.0736 & -0.0732 & -0.0728 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0002 & -0.1130 & -0.0848 & -0.0601 & -0.0385 & -0.0197 & -0.0035 \\ -0.0004 & -0.2353 & -0.1971 & -0.1622 & -0.1305 & -0.1018 & -0.0757 \\ 0.0008 & -0.4336 & -0.3862 & -0.3416 & -0.2996 & -0.2600 & -0.2227 \\ -0.0245 & -0.5514 & -0.5329 & -0.5149 & -0.4976 & -0.4808 & -0.4646 \\ 16.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks keterkendalian $M_{c_{Gs}}$ diketahui bahwa rank $M_{c_{Gs}}$ adalah 6, maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem G_s tidak terkendali. Keteramatan sistem G_s dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keteramatan $M_{o_{Gs}}$.

$$M_{O-Gs} = \begin{pmatrix} -17.3644 & 0.0000 & -7.0040 & 2.4502 & -0.9750 & 1.4097 & 0.0156 \\ -17.3297 & 0.47 \times 10^6 & -6.7308 & 2.5907 & -0.9049 & 1.4712 & 0.0705 \\ -17.2950 & 0.87 \times 10^6 & -6.4668 & 2.7168 & -0.8464 & 1.5181 & 0.0623 \\ -17.2605 & 1.2 \times 10^6 & -6.2119 & 2.8294 & -0.7984 & 1.5522 & 0.0553 \\ -17.2260 & 1.5 \times 10^6 & -5.9655 & 2.9293 & -0.7602 & 1.5749 & 0.0493 \\ -17.1915 & 1.7 \times 10^6 & -5.7276 & 3.0171 & -0.7307 & 1.5878 & 0.0441 \\ -17.1572 & 1.9 \times 10^6 & -5.4978 & 3.0937 & -0.7091 & 1.5923 & 0.0397 \end{pmatrix}$$

Dari matriks keterkendalian $M_{O_{GS}}$ diketahui bahwa rank $M_{O_{GS}}$ adalah 7, maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem G_s teramati. Karena sistem G_s bersifat stabil asimtotik, tidak terkendali dan teramati maka digunakan realisasi minimal agar sistem bersifat stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Sehingga G_s berorde $m = 6$ sebagai berikut

$$G_s = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0.9980 & -0.0022 & 0.0014 & 0.0002 & -0.0009 & -0.0044 & -0.0041 \\ 0 & 0.9663 & -0.0353 & -0.0172 & -0.0155 & -0.0071 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0.9663 & -0.0325 & -0.0294 & -0.0147 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9663 & -0.0593 & -0.0272 & 0.0008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9663 & -0.0330 & -0.0245 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.0000 \\ \hline -17.3644 & -7.0040 & 2.4502 & -0.9750 & 1.4097 & 0.0156 & 0 \end{array} \right)$$

Keterkendalian sistem G_s dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keterkendalian sebagai berikut.

$$M_{C-G_s} = \left(\begin{array}{cccccc} -0.0041 & -0.0748 & -0.0744 & -0.0740 & -0.0736 & -0.0732 \\ 0.0002 & -0.1130 & -0.0848 & -0.0601 & -0.0385 & -0.0197 \\ -0.0004 & -0.2353 & -0.1971 & -0.1622 & -0.1305 & -0.1018 \\ 0.0008 & -0.4336 & -0.3862 & -0.3416 & -0.2996 & -0.2600 \\ -0.0245 & -0.5514 & -0.5329 & -0.5149 & -0.4976 & -0.4808 \\ 16.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Dari matriks keterkendalian $M_{C_{GS}}$ diketahui bahwa rank $M_{C_{GS}}$ adalah 6, maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem G_s terkendali. Keteramatan sistem G_s dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keteramatan $M_{O_{GS}}$.

$$M_{O-G_s} = \left(\begin{array}{cccccc} -17.3644 & -7.0040 & 2.4502 & -0.9750 & 1.4097 & 0.0156 \\ -17.3297 & -6.7308 & 2.5907 & -0.9049 & 1.4712 & 0.0705 \\ -17.2950 & -6.4668 & 2.7168 & -0.8464 & 1.5181 & 0.0623 \\ -17.2605 & -6.2119 & 2.8294 & -0.7984 & 1.5522 & 0.0553 \\ -17.2260 & -5.9655 & 2.9293 & -0.7602 & 1.5749 & 0.0493 \\ -17.1915 & -5.7276 & 3.0171 & -0.7307 & 1.5878 & 0.0441 \end{array} \right)$$

Dari matriks keterkendalian $M_{O_{GS}}$ diketahui bahwa rank $M_{O_{GS}}$ adalah 6, maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem G_s teramati. Pada tahap ini, sistem G_s memiliki sifat stabil asimtotik, terkendali dan teramati.

Dari subsistem G_s di atas, akan dilakukan pembentukan sistem setimbang. Dalam pembentukan sistem setimbang, akan ditentukan Gramian keterkendalian dan

Gramian keteramatan . Gramian keterkendalian dan keteramatan untuk sistem waktu diskrit adalah sebagai berikut

$$P = \sum_{i=0}^{i=\infty} A^i B B^* (A^*)^i$$

$$Q = \sum_{i=0}^{i=\infty} (A^*)^i C^* C A^i$$

P dan Q memenuhi persamaan lyapunov sebagai berikut :

$$A P A^* - P + B B^* = 0$$

$$A^* Q A - Q + C^* C = 0$$

Dari hasil simulasi dapat diperoleh gramian keterkendalian P dan gramian keteramatan Q sebagai berikut :

$$P = \begin{pmatrix} 1.3940 & -0.2355 & 0.4021 & -0.8253 & 1.0620 & -0.0660 \\ -0.2355 & 0.2550 & -0.0109 & 0.0735 & -0.0881 & 0.0035 \\ 0.4021 & -0.0109 & 0.8939 & -0.0909 & 0.1600 & -0.0063 \\ -0.8253 & 0.0735 & -0.0909 & 3.7160 & -0.3654 & 0.0122 \\ 1.0620 & -0.0881 & 0.1600 & -0.3654 & 4.5936 & -0.3927 \\ -0.0660 & 0.0035 & -0.0063 & 0.0122 & -0.3927 & 256.0000 \end{pmatrix}$$

$$Q = 10^4 \begin{pmatrix} 7.5501 & -0.1140 & 0.2893 & -0.1134 & -0.2496 & -0.0255 \\ -0.1140 & 0.0818 & -0.0799 & 0.0310 & -0.0164 & 0.0008 \\ 0.2893 & -0.0799 & 0.1052 & -0.0514 & 0.0226 & -0.0016 \\ -0.1134 & 0.0310 & -0.0514 & 0.0345 & -0.0231 & 0.0009 \\ -0.2496 & -0.0164 & 0.0226 & -0.0231 & 0.0379 & 0.0003 \\ -0.0255 & 0.0008 & -0.0016 & 0.0009 & 0.0003 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dari matriks Gramian keterkendalian P dan Gramian keteramatan Q , dapat ditentukan nilai singular Hankel dari sistem G_s yaitu $HSV(\sigma_i) = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$ dengan $i = 1,2,3,4,5,6$. seperti yang diperlihatkan pada tabel 4.3 berikut ini.

Tabel 4. 3 Nilai singular Hankel sub sistem G_s

i	σ_i	$\sigma_i - \sigma_{i+1}$
1	327.1102	281.9402
2	45.1700	24.8828
3	20.2872	10.3372
4	9.9500	6.4921
5	3.4579	2.6447
6	0.8132	0.8132

Berdasarkan Tabel 4.3, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular hankel bernilai tidak sama dengan 0. Hal ini berarti bahwa Gramian kesetimbangan Σ adalah definit positif. Karena Gramian kesetimbangan Σ definit positif, maka dijamin bahwa sistem G_s , adalah sistem yang terkendali dan teramati.

Selanjutnya dari sistem G_s , akan dibentuk menjadi sistem setimbang $G_{bal} = (A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$ dengan tahapan sebagai berikut.

1. Dengan menggunakan dekomposisi nilai singular dari gramian keterkendalian P dan gramian keteramatan Q , akan didapatkan matriks transformasi similaritas. Dekomposisi nilai singular dari P dan Q sebagai berikut

$$P = U_p \Sigma_p V_p' \text{ dan } Q = U_q \Sigma_q V_q'$$

Dengan :

U_p, V_p, U_q dan V_q adalah matriks uniter.

$P, Q, \Sigma_p, U_p, V_p, U_q, \Sigma_q$ dan $\Sigma_q \in R^{m \times m}$.

Kemudian dimisalkan $V_R = U_p \sqrt{\Sigma_p}$, $V_L = U_q \sqrt{\Sigma_q}$ dan $E = V_L' \cdot V_R$.

Selanjutnya dekomposisi nilai singular dari E yaitu

$$E = U_E \Sigma_E V_E'$$

$$E = \begin{pmatrix} -0.9930 & -0.1167 & 0.0183 & -0.0081 & 0.0023 & -0.0001 \\ 0.1094 & -0.8392 & 0.4936 & -0.1954 & 0.0443 & -0.0022 \\ 0.0445 & -0.5242 & -0.7154 & 0.4360 & -0.1456 & 0.0113 \\ -0.0083 & 0.0852 & 0.4908 & 0.7866 & -0.3642 & 0.0203 \\ 0.0010 & -0.0087 & 0.0572 & 0.3908 & 0.9141 & -0.0916 \\ -0.0001 & 0.0015 & 0.0044 & 0.0145 & 0.0933 & 0.9955 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 327.1102 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.1700 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.2872 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.9500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4579 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8132 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0498 & 0.6181 & -0.2291 & -0.6508 & 0.3604 & 0.0977 \\ 0.0758 & -0.6422 & 0.1722 & -0.2890 & 0.6218 & 0.2865 \\ 0.1036 & -0.4190 & -0.3732 & -0.5605 & -0.3937 & -0.4531 \\ 0.1656 & -0.0986 & -0.7643 & 0.2048 & -0.0800 & 0.5748 \\ 0.3636 & 0.0532 & -0.3330 & 0.3484 & 0.5357 & -0.5881 \\ 0.9063 & 0.1322 & 0.2889 & -0.1247 & -0.1874 & 0.1641 \end{pmatrix}$$

Dengan : $V_R, V_L, E, U_E, \Sigma_E$ dan $V_E \in R^{m \times m}$.

Sehingga dapat diperoleh matriks transformasi similaritas sebagai berikut :

$$S_L = V_L \cdot U_E \cdot (\Sigma_E)^{-1/2}$$

$$S_L = \begin{pmatrix} -274.7705 & -1.4297 & 0.3975 & -0.3422 & -0.0285 & 0.0002 \\ 4.2925 & -25.8054 & 10.6119 & 4.5126 & -0.7353 & 0.0003 \\ -10.6901 & 30.1609 & 0.0660 & 5.1090 & -1.3372 & 0.0007 \\ 4.1945 & -15.3326 & -9.1597 & -1.8037 & -2.2098 & 0.0014 \\ 9.0479 & 11.5903 & 11.3832 & -5.6736 & -1.0820 & 0.0018 \\ 0.9282 & -0.2230 & -0.1993 & 0.1357 & 0.1109 & 0.0557 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.9930 & -0.1167 & 0.0183 & -0.0081 & 0.0023 & -0.0001 \\ 0.1094 & -0.8392 & 0.4936 & -0.1954 & 0.0443 & -0.0022 \\ 0.0445 & -0.5242 & -0.7154 & 0.4360 & -0.1456 & 0.0113 \\ -0.0083 & 0.0852 & 0.4908 & 0.7866 & -0.3642 & 0.0203 \\ 0.0010 & -0.0087 & 0.0572 & 0.3908 & 0.9141 & -0.0916 \\ -0.0001 & 0.0015 & 0.0044 & 0.0145 & 0.0933 & 0.9955 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 327.1102 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.1700 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.2872 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.9500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4579 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8132 \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$S_I = \begin{pmatrix} 15.0779 & 4.9136 & -1.3724 & 0.7625 & -0.3531 & 0.0465 \\ -0.3677 & 2.3781 & -4.0138 & 4.0882 & -2.6846 & 0.3729 \\ 0.7671 & -3.5190 & 3.7912 & -0.7231 & -0.9586 & 0.1790 \\ -0.3449 & 2.5361 & -0.4330 & -1.0507 & -0.3756 & 0.1085 \\ -0.3961 & -2.5627 & -1.1332 & -0.7168 & -0.0245 & 0.0957 \\ -0.0529 & 0.0289 & 0.0272 & 0.0317 & 0.0422 & 0.0512 \end{pmatrix}$$

$$S_R = V_R \cdot U_E \cdot (\Sigma_E)^{-\frac{1}{2}}$$

$$S_R = \begin{pmatrix} -0.0043 & 0.7611 & -0.2109 & -0.7388 & 0.4555 & 0.1302 \\ 0.0002 & -0.0847 & 0.0284 & 0.1480 & -0.2393 & 0.4097 \\ -0.0004 & 0.1625 & -0.0354 & -0.7307 & -0.5731 & -0.0612 \\ 0.0008 & -0.9143 & 1.6771 & -0.2393 & 0.0988 & 0.0183 \\ -0.0250 & 1.9368 & 0.8788 & 0.2452 & -0.0947 & -0.0195 \\ 16.0000 & 0.0033 & 0.0012 & 0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.9930 & -0.1167 & 0.0183 & -0.0081 & 0.0023 & -0.0001 \\ 0.1094 & -0.8392 & 0.4936 & -0.1954 & 0.0443 & -0.0022 \\ 0.0445 & -0.5242 & -0.7154 & 0.4360 & -0.1456 & 0.0113 \\ -0.0083 & 0.0852 & 0.4908 & 0.7866 & -0.3642 & 0.0203 \\ 0.0010 & -0.0087 & 0.0572 & 0.3908 & 0.9141 & -0.0916 \\ -0.0001 & 0.0015 & 0.0044 & 0.0145 & 0.0933 & 0.9955 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 327.1102 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.1700 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.2872 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.9500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4579 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8132 \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$S_r = \begin{pmatrix} 0.0651 & 0.0013 & -0.0144 & -0.0087 & 0.0103 & 0.0709 \\ -0.0111 & -0.0022 & -0.0332 & 0.0861 & -0.1782 & 0.1007 \\ 0.0205 & -0.0407 & 0.1350 & -0.0406 & -0.2717 & 0.2210 \\ -0.0418 & 0.1506 & -0.0346 & -0.3925 & -0.3485 & 0.4200 \\ 0.0443 & -0.1830 & -0.2738 & -0.2600 & -0.0821 & 0.5227 \\ -0.0440 & 0.1801 & 0.3677 & 0.8396 & 3.1280 & 16.0818 \end{pmatrix}$$

Dimana : S_L dan $S_R \in R^{mxm}$

2. Realisasi setimbang dari sub sistem stabil adalah sebagai berikut :

$$A_{bal} = S'_L A_S S_R \begin{pmatrix} 0.9988 & -0.0016 & 0.0012 & -0.0015 & 0.0018 & -0.0022 \\ 0.0016 & 0.9971 & 0.0095 & -0.0048 & 0.0082 & -0.0091 \\ 0.0012 & -0.0095 & 0.9944 & 0.0234 & -0.0133 & 0.0190 \\ 0.0015 & -0.0048 & -0.0234 & 0.9850 & 0.0538 & -0.0414 \\ 0.0018 & -0.0082 & -0.0133 & -0.0538 & 0.9217 & 0.1819 \\ 0.0022 & -0.0091 & -0.0190 & -0.0414 & -0.1819 & -0.0335 \end{pmatrix}, B_{bal} = S'_L B_S \begin{pmatrix} -0.8988 \\ 0.5083 \\ 0.4663 \\ 0.5221 \\ 0.6760 \\ 0.8174 \end{pmatrix}$$

$$C_{bal} = C_S S_R = (-0.8988 - 0.5083 \ 0.4663 - 0.5221 \ 0.6760 - 0.8174), D_{bal} = D_S = (0)$$

$$G_{bal} = \begin{pmatrix} A_{bal} & B_{bal} \\ - & - \\ C_{bal} & D_{bal} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'_L A_S S_R & S'_L B_S \\ - & - \\ C_S S_R & D_S \end{pmatrix}$$

$$G_{bal} = \begin{pmatrix} 0.9988 & -0.0016 & 0.0012 & -0.0015 & 0.0018 & -0.0022 & -0.8988 \\ 0.0016 & 0.9971 & 0.0095 & -0.0048 & 0.0082 & -0.0091 & 0.5083 \\ 0.0012 & -0.0095 & 0.9944 & 0.0234 & -0.0133 & 0.0190 & 0.4663 \\ 0.0015 & -0.0048 & -0.0234 & 0.9850 & 0.0538 & -0.0414 & 0.5221 \\ 0.0018 & -0.0082 & -0.0133 & -0.0538 & 0.9217 & 0.1819 & 0.6760 \\ 0.0022 & -0.0091 & -0.0190 & -0.0414 & -0.1819 & -0.0335 & 0.8174 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ -0.8988 & -0.5083 & 0.4663 & -0.5221 & 0.6760 & -0.8174 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, sama seperti pada sistem G_s , pada sistem setimbang G_{bal} juga diperiksa sifat kestabilan, keteramatan dan keterkendaliannya. Kestabilan sistem setimbang G_{bal} dapat dilihat melalui nilai eigen matriks A_{bal} , seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.4.

Tabel 4. 4 Nilai eigen matriks A_{bal}

i	$ \lambda_i $
1	0.9980
2	0.9663
3	0.9663
4	0.9663
5	0.9663
6	0

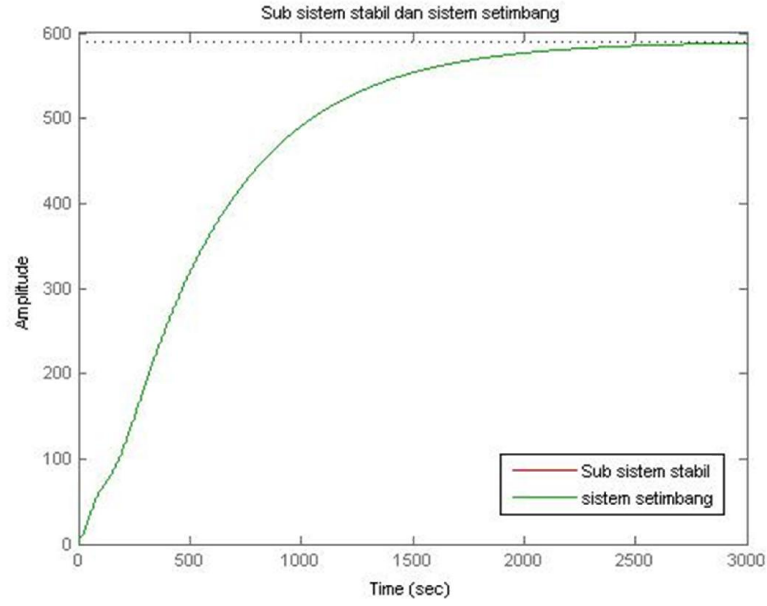
Berdasarkan Tabel 4.4. terlihat bahwa semua nilai absolut dari nilai eigen matriks A_{bal} adalah bernilai kurang dari 1, sehingga sistem G_s adalah sistem yang stabil asimtotik. Keterkendalian sistem G_s dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keterkendalian sebagai berikut.

$$M_{C-Bal} = \begin{pmatrix} -0.8988 & -0.8993 & -0.8974 & -0.8959 & -0.8947 & -0.8937 \\ 0.5083 & 0.5054 & 0.5123 & 0.5177 & 0.5217 & 0.5246 \\ 0.4663 & 0.4766 & 0.4665 & 0.4592 & 0.4542 & 0.4512 \\ 0.5221 & 0.5021 & 0.5267 & 0.5432 & 0.5524 & 0.5550 \\ 0.6760 & 0.7316 & 0.6011 & 0.4840 & 0.3792 & 0.2857 \\ 0.8174 & -0.1875 & -0.1633 & -0.1412 & -0.1213 & -0.1032 \end{pmatrix}$$

Dari matriks keterkendalian M_{c_bal} diketahui bahwa rank M_{c_bal} adalah 6, maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem G_{bal} terkendali. Keteramatan sistem G_{bal} dapat ditentukan berdasarkan rank dari matriks keteramatan M_{o_bal} .

$$M_{O-Bal} = \begin{pmatrix} -0.8988 & -0.5083 & 0.4663 & -0.5221 & 0.6760 & -0.8174 \\ -0.8993 & -0.5054 & 0.4766 & -0.5021 & 0.7316 & 0.1875 \\ -0.8974 & -0.5123 & 0.4665 & -0.5267 & 0.6011 & 0.1633 \\ -0.8959 & -0.5177 & 0.4592 & -0.5432 & 0.4840 & 0.1412 \\ -0.8947 & -0.5217 & 0.4542 & -0.5524 & 0.3792 & 0.1213 \\ -0.8937 & -0.5246 & 0.4512 & -0.5550 & 0.2857 & 0.1032 \end{pmatrix}$$

Dari matriks keterkendalian M_{O_bal} diketahui bahwa rank M_{O_bal} adalah 6, maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem G_{bal} teramati.



Gambar 4.1 *Step response* sub sistem G_s dan G_{bal}

Pada gambar 4.1 memperlihatkan grafik *step response* antara sub sistem stabil G_s dan sub sistem setimbang G_{bal}

Selanjutnya, dari hasil perhitungan diperoleh Gramian keterkendalian P_{bal} dan Gramian keteramatan Q_{bal} dari sistem setimbang G_{bal} yaitu :

$$P_{bal} = Q_{bal} = \Sigma = \begin{pmatrix} 327.1102 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.1700 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.2872 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.9500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4579 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8132 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa Gramian $P_{bal} = Q_{bal} = \Sigma$ definit positif. Sehingga dijamin bahwa sistem setimbang G_{bal} adalah sistem yang teramati dan terkendali.

Realisasi setimbang merupakan kombinasi sub sistem yang pengaruhnya signifikan dan subsistem yang kurang signifikan (berdasarkan nilai singular Hankel), sehingga berdasarkan nilai singular Hankel sistem setimbang dapat dipotong pada baris dan kolom antara i dan $i + 1$ bersesuaian dengan nilai singular Hankel pada tabel 4.3 yaitu sebagai berikut.

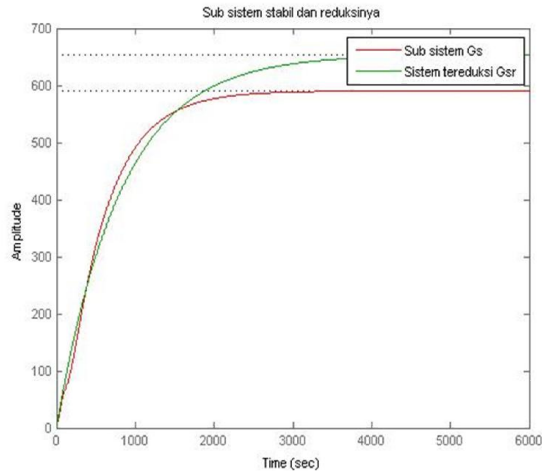
$$G_{bal} = \left(\begin{array}{cc|c} A_{bal,11} & A_{bal,12} & B_{bal,1} \\ A_{bal,21} & A_{bal,22} & B_{bal,2} \\ \hline C_{bal,1} & C_{bal,2} & D_{bal} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{bal,11} & B_{bal,1} \\ \hline C_{bal,1} & D \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} A_{bal,22} & B_{bal,2} \\ \hline C_{bal,2} & 0 \end{array} \right)$$

Berdasarkan nilai singular hankel (Tabel 4.3) terlihat bahwa ada perubahan nilai singular hankel yang signifikan antara $i = 1$ dan $i = 2$. Sehingga, model pemotongan setimbang G_{sr_bt} dipilih dengan *orde* $r = 1$, dengan memotong realisasi dari sistem setimbang G_{bal} sebagai berikut :

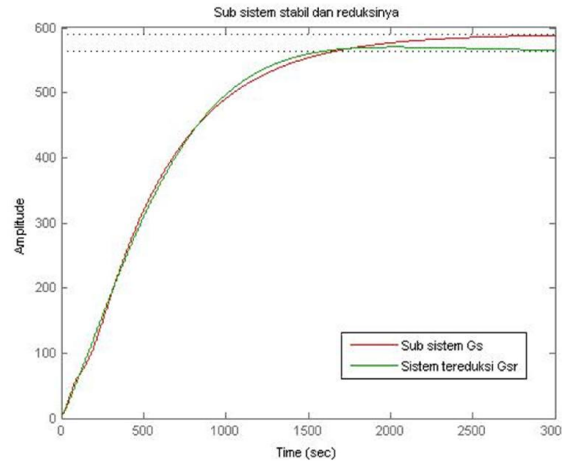
$$G_{sr_bt} = \begin{matrix} \overset{r}{\leftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{bal_1} & B_{bal_1} \\ \hline C_{bal_1} & D_{bal} \end{array} \right) \updownarrow r \end{matrix}$$

$$G_{sr_bt} = \left(\begin{array}{c|c} 0.9988 & -0.8988 \\ \hline -0.8988 & 0 \end{array} \right)$$

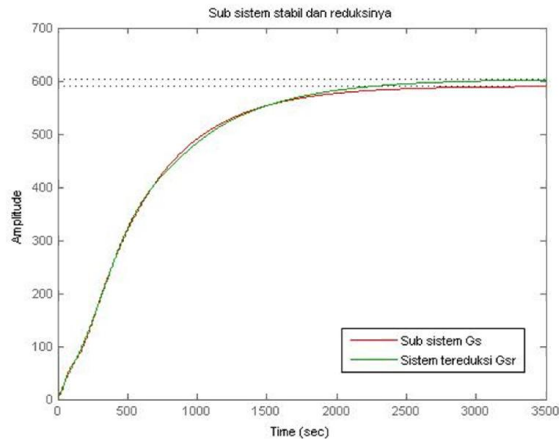
Pada gambar 4.2 menunjukkan bahwa semakin sedikit pemotongan state dari sistem setimbang (orde dari G_{sr_bt} semakin besar yaitu $r = 2,3,4,5$) maka *step response* dari sub sistem stabil asimtotik G_s dan reduksinya G_{sr_bt} semakin mendekati grafik *step response* dari sub sistem stabil asimtotik G_s .



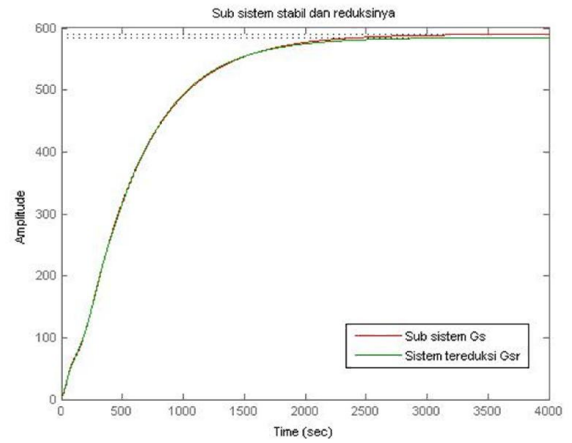
(a) $r=1$



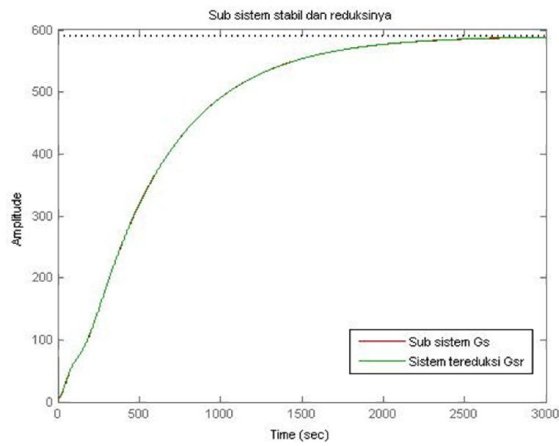
(b) $r=2$



(c) $r=3$



(d) $r=4$



(e) $r=5$

Gambar 4.2 *Step response* sub sistem stabil asimtotik G_s dan G_{sr_bt}

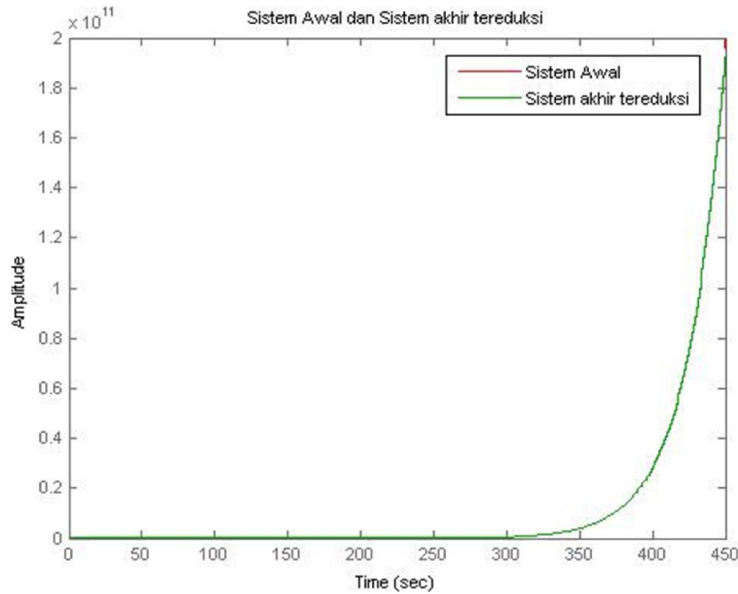
4.5 Sistem Akhir Tereduksi

Sistem akhir tereduksi dari sistem tidak stabil dengan metode pemotongan setimbang diperoleh dengan menggabungkan kembali sub sistem stabil tereduksi dan sub sistem tidak stabil sehingga diperoleh sistem akhir tereduksi berorde 6 yaitu sebagai berikut :

$$G_{r_bt} = G_{sr_bt} + G_u$$

$$G_{r_bt} = \begin{pmatrix} 0.9988 & -0.8988 \\ -0.8988 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0323 & -0.0620 & 0.0321 & -0.0174 & 0.0009 & -0.2121 \\ 0 & 1.0323 & -0.0342 & 0.0185 & -0.0006 & 0.2363 \\ 0 & 0 & 1.0323 & -0.0368 & -0.0009 & -0.5164 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0323 & -0.0014 & 0.9656 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0.0950 \\ -3.7625 & -3.2642 & -1.5663 & -0.8370 & -3.2687 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_{r_bt} = \begin{pmatrix} 0.9988 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8988 \\ 0 & 1.0323 & -0.0620 & 0.0321 & -0.0174 & 0.0009 & -0.2121 \\ 0 & 0 & 1.0323 & -0.0342 & 0.0185 & -0.0006 & 0.2363 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0323 & -0.0368 & -0.0009 & -0.5164 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0323 & -0.0014 & 0.9656 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0.0950 \\ -0.8988 & -3.7625 & -3.2642 & -1.5663 & -0.8370 & -3.2687 & 0 \end{pmatrix}$$



Gambar 4.3 *Step response* sistem awal G dan sistem akhir tereduksi G_{r_bt}

Pada gambar 4.3 menunjukkan grafik *step response* sistem awal G dan sistem akhir tereduksi G_{r_bt} dengan nilai error $\|G - G_{r_bt}\|_{\infty}$ diperlihatkan pada tabel 4.5.

4.6 Kesalahan Reduksi (Error)

Berdasarkan nilai singular hankel pada tabel 4.3 dan teorema 2.3 dapat ditentukan besarnya batas atas kesalahan reduksi (error) dari sub sitem stabil tereduksi G_{sr_bt} terhadap sub sistem G_s yang berorde $m = 6$.

- a) Untuk kasus G_{sr_bt} berorde 1 ($r = 1$), batas atas kesalahan reduksi adalah sebagai berikut :

$$2tr\Sigma_2 = 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n) = 2(\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6)$$

$$2tr\Sigma_2 = 2(45,1102 + 20,2872 + 9,9500 + 3,4579 + 0,8132) = 159.3567$$

- b) Untuk kasus G_{sr_bt} berorde 2 ($r = 2$), batas atas kesalahan reduksi adalah sebagai berikut :

$$2tr\Sigma_2 = 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n) = 2(\sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6)$$

$$2tr\Sigma_2 = 2(20.2872 + 9.9500 + 3.4579 + 0.8132) = 69.0166$$

Dan seterusnya untuk r lainnya, selengkapnya dapat dilihat pada tabel 4.5.

Pada sub sistem stabil asimtotik dengan fungsi transfer sistem G_s , Norm H_∞ dari kesalahan reduksi diperlihatkan pada tabel 4.5 sebagai berikut.

Tabel 4. 5 Norm H_∞ dan batas atas dari kesalahan reduksi

Orde Sistem Stabil Tereeduksi	$\sigma_i - \sigma_{i+1}$	$\ G - G_{r_bt}\ _\infty$	$\ G_s - G_{sr_bt}\ _\infty$	$\frac{\ G_s - G_{sr_bt}\ _\infty}{\ G_s\ _\infty}$	$2tr\Sigma_2$	Efisiensi Waktu Komputasi
r=1 (m-5)	281.9402	1.7181	64.1954	0.1088 (10.88%)	159.3567	0.3094
r=2 (m-4)	24.8828	2.0788	27.7932	0.0471 (4.71%)	69.0166	0.1525
r=3 (m-3)	10.3372	1.8113	13.9925	0.0237 (2.37%)	28.4423	0.1310
r=4 (m-2)	6.4921	6.7147	5.8930	0.0100 (1.0%)	8.5423	0.1066
r=5 (m-1)	2.6447	20.0634	1.1821	0.0020 (0.2 %)	1.6264	0.1024

Dari tabel di atas, $\|G - G_{r_bt}\|_\infty$ menunjukkan besarnya error reduksi dari sub sistem stabil asimtotik, terlihat bahwa besarnya error kurang dari dua kali nilai singular yang dipotong ($2tr\Sigma_2$). Sedangkan $\|G - G_{r_bt}\|_\infty$ menunjukkan besarnya error reduksi dari sistem awal.

4.7 Waktu Komputasi

Untuk mendapatkan waktu komputasi dari sistem awal dan sistem tereduksi digunakan *tool* fungsi Matlab. Dalam hal ini, waktu komputasi yang dihitung adalah waktu yang dibutuhkan oleh komputer/PC untuk menampilkan grafik *step respon* sistem dan sistem akhir tereduksi. Efisiensi waktu komputasi dapat dilihat pada kolom ketujuh pada tabel 4.5.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan untuk mengembangkan penelitian berikutnya tentang reduksi model.

5.1 Kesimpulan

Dari analisa dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa untuk model aliran sungai (*shallow water problem*) persamaan saint venant dengan sistem awal diketahui tidak stabil dapat direduksi dengan menggunakan metode pemotongan setimbang. Kesimpulan yang diperoleh adalah sebagai berikut :

- a) Dapat diperoleh sistem akhir tereduksi dari sistem tidak stabil model aliran sungai saint venant dengan pendiskritan $N = 5$ menggunakan metode pemotongan setimbang dengan orde sistem akhir tereduksi G_{r_bt} adalah 6.
- b) Berdasarkan hasil simulasi terlihat bahwa *step response* antara sub sistem G_s dan sub sistem stabil tereduksi G_{sr_bt} terlihat menunjukkan karakteristik yang sama dengan kesalahan reduksi (error) reduksi $\|G_s - G_{sr_bt}\|_\infty$ kurang dari dua kali jumlah nilai singular Hankel yang tereduksi.
- c) Sistem awal G dan sistem akhir tereduksi G_{r_bt} dengan orde 6 memiliki nilai error $\|G - G_{r_bt}\|_\infty = 1.7181$. dengan efisiensi waktu komputasi 0,3094 detik

5.2 Saran

Adapun saran dari penelitian ini yaitu untuk selanjutnya dapat diteliti mengenai reduksi model dengan metode lainnya yaitu *singular perturbation analysis*, *modal analysis*, *metode krylov*, dan kombinasi dekomposisi nilai *singular dan metode krylov*. dan penerapan model reduksi pada sistem tidak stabil lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Saggaf, U. M, (1992), *Model Reduction for Discrete-Unstable Systems Based on Generalized Normal Representations*, Int. J. of Control. 55, 431–443
- Anton, Howard and Rorres, Chris, (2013). *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons.
- Arif, D. K. (2014). *Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction*. International Journal Control and Automation (IJCA), Vol 7. No.9, 257-270.
- Dukic, S.D. dan Saric, A.T, (2012), *Dynamic Model Reduction : An Overview of Available Techniques with Application to Power Systems*, in Serbian Journal of Electrical Engineering. Vol.9, no.2, pp:131-169.
- Green, M dan Limebeer, (1995) , *Linear Robust Control*, Prentice –Hall, Inc.
- Jenizon, Lestari,R dan Syafrizal, (2003), *Model Reduksi Menggunakan Linier Matriks Inequality (LMI) kasus waktu kontinu*, UNAND, Padang
- Kumar, D. Tiwari, J.P dan Nagar, S.K, (2011), *Reduction of Unstable Discrete Time Systems by Hankel Norm Approximation*, International Journal of Engineering Science and Technology, Vol.3, No.4
- Moore, B.C, (1981), *Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, No. 1, Feb. 1981, pp. 17 – 32.
- Musthofa, M.W, (2007), *Thesis : Reduksi Orde Model Sistem Linear Parameter Varying Melalui Linear Matrix Inequalities*, ITB.
- Nagar S.K dan Singh S.K, (2004), *An Algorithmic Approach for System Decomposition and Balanced Realized Model Reduction*, Journal of Franklin Institute 341 p.615-630, Published : Elsevier.
- Oppenheim, A.V, Willsky, A.S. dan Nawab, S.H, (1997), *Signals & Systems*, Prentice-Hall International, Inc.
- Ogata, K , (2007), *Discrete-Time Control Systems* , Prentice Hall Inc , USA
- Paraskevopoulos, N.P, (1996), *Digital Control Systems*, Prentice-Hall Europe
- Wachid, A dan Widowati, (2006), *Reduksi Orde Plant dan Pengendali dengan Menggunakan Metode Pemotongan Setimbang*.Prosiding SPMIPA Universitas Diponegoro Semarang

Verlaan M. (1998). “*Efficient Kalman Filtering Algorithms for Hydrodynamic Models*”. Belanda : University of Delft.

Zhou, K. Salomon, G dan Wu, E. (1999), *Balanced Realization and Model Reduction for Unstable Systems*. International journal Robust Nonlinear Control, Vol 9, p183-198

LAMPIRAN A

LISTING PROGRAM REDUKSI MODEL

```

clc;
clear all;

%% Contoh reduksi model pada aliran sungai model Sain Venant

L=30;          % 30km panjang sungai
dx=6000;       % panjang sungai dibagi sepuluh titik
D=10;          % kedalaman sungai terhadap acuan
g=9.8;         % percepatan gravitasi 9.8 m/s^2
Cf=0.0002;     % koefisien gesekan
dt=10;
theta=0.3;
% psi_b((k+1)*dt)=a0*psi_b(k*dt) dengan psi_b(0)=1, a0=e^(-1/6)

a=1/(2*dt);
b=(D*theta)/dx;
b2=(D*(1-theta))/dx;

c=(g*theta)/dx;
c2=(g*(1-theta))/dx;

d=a+(Cf*theta)/2;
d2=a-(Cf*(1-theta))/2;
e= exp(-1/6);

A1=[ 1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0 ;
     -c    d    c    d    0    0    0    0    0    0    0    0 ;
       0    0    a   -b    a    b    0    0    0    0    0    0 ;
       0    0   -c    d    c    d    0    0    0    0    0    0 ;
       0    0    0    0    a   -b    a    b    0    0    0    0 ;
       0    0    0    0   -c    d    c    d    0    0    0    0 ;
       0    0    0    0    0    0    a   -b    a    b    0    0 ;
       0    0    0    0    0    0   -c    d    c    d    0    0 ;
       0    0    0    0    0    0    0    0    a   -b    a    b ;
       0    0    0    0    0    0    0    0   -c    d    c    d ;
       0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    a   -b ;
       0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1 ];

A2=[e    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0 ;
     c2 d2 -c2 d2    0    0    0    0    0    0    0    0 ;
       0    0    a   b2    a  -b2    0    0    0    0    0    0 ;
       0    0    c2 d2  -c2 d2    0    0    0    0    0    0    0 ;
       0    0    0    0    a   b2    a  -b2    0    0    0    0 ;
       0    0    0    0    c2 d2  -c2 d2    0    0    0    0    0 ;
       0    0    0    0    0    0    a   b2    a  -b2    0    0 ;
       0    0    0    0    0    0    c2 d2  -c2 d2    0    0    0 ;
       0    0    0    0    0    0    0    0    a   b2    a  -b2 ;
       0    0    0    0    0    0    0    0    c2 d2  -c2 d2 ;
       0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    a   b2 ;
       0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0 ];

A=inv(A1)*A2;
A

```

```

k=12;
% Matriks B
B=zeros(k,1);
B(k,1)=1;
B=A1*B;
B

% Matriks C
C=zeros (1,k);
C(1,2)=1;
C

% Matriks D
D=[0];

%% Menentukan nilai eigen (stabil atau tidak stabil),
% Sistem waktu discrete, kurang dari sama dengan 1 stabil, lebih dari
satu tidak stabil

[n n]=size(A); %dimensi matriks A
Eigen_A=eig(A);
Evals=abs(Eigen_A)

%inisiasi, jumlah eigen stabil dan tidak stabil
Tidak_Stabil = 0;
Stabil = 0;
Stabil_Asimptotik = 0;
for i = 1:n
    if real(Evals(i)) > 1
        Tidak_Stabil = Tidak_Stabil +1;
    end
    if real(Evals(i)) < 1
        Stabil_Asimptotik = Stabil_Asimptotik +1;
    end
    if real(Evals(i)) == 1
        Stabil = Stabil +1;
    end
end

Stabil=Stabil+Stabil_Asimptotik;
Tidak_Stabil
Stabil

%Stabil_Asimptotik

%Terkendali (controllable)
Co = ctrb(A,B)
Rank_Co=rank(Co)
unco=length(A)-rank(Co); % Jumlah state tidak terkendali
(uncotrollable)

%Teramati
Ob = obsv(A,C)
Rank_Ob=rank(Ob)
unob = length(A)-rank(Ob); % Jumlah state tidak teramati

```

```

%% Dekomposisi sub sistem stabil dan sub sistem tidak stabil

G=ss(A,B,C,D,1);
[Gs,Gu]=stabsep(G,'Mode', 1,'Offset',0);

% sistem stabil
Gs;
As=Gs.a;
Bs=Gs.b;
Cs=Gs.c;
Ds=Gs.d;

% Sistem tidak stabil
Gu;
Au=Gu.a;
Bu=Gu.b;
Cu=Gu.c;
Du=Gu.d;

% Kestabilan
Stabil_Gs=abs(eig(As))
%Terkendali (controllable)
Col = ctrb(As,Bs)
Rank_Col=rank(Col)
unco1=length(As)-rank(Col) % Jumlah keadaan/state tidak terkendali

%Teramati
Ob1 = obsv(As,Cs)
Rank_Ob1=rank(Ob1)
unob1 = length(As)-rank(Ob1) % Jumlah keadaan/state tidak teramati

%%

sys=Gs
syss=minreal(sys); % eliminates uncontrollable or unobservable state
in state-space models
As=syss.a;
Bs=syss.b;
Cs=syss.c;
Ds=syss.d;
Gs=[As Bs;Cs Ds]

% Kestabilan
Stabil_Gs=abs(eig(As))
%Terkendali (controllable)
Mc_Gsm = ctrb(As,Bs)
Rank_Mc_Gsm=rank(Mc_Gsm)
unco4=length(As)-rank(Mc_Gsm); % Jumlah keadaan/state tidak
terkendali

%Teramati
Mo_Gsm = obsv(As,Cs)

```

```

Rank_Mo_Gsm=rank(Mo_Gsm)
unob4 = length(As)-rank(Mo_Gsm); % Jumlah keadaan/state tidak
teramati

%% Reduksi sistem stabil dengan metode pemotongan setimbang
As;Bs;Cs;Ds;

disp('I. GRAMIAN KETERKENDALIAN P & GRAMIAN KETEREMATAN Q')
%sys=ss(As,Bs,Cs,Ds,1);
P = gram(sys,'c')
Q = gram(sys,'o')

%CEK GRAMIAN KETERKENDALIAN, Definit positif
eig_P=eig(P);
det_P=det(P);
%CEK GRAMIAN KETERAMATAN, Definit positif
eig_Q=eig(Q);
det_Q=det(Q);

%CEK GRAMIAN KESETIMBANGAN, Definit positif
P*Q;
eig_Sigma=sqrt(eig(P*Q));
det_Sigma=det(P*Q)

disp('Langkah 2. Menentukan nilai nilai singular hankel (HSV)')

hsv=abs(sqrt(eig(P*Q)))

disp('Langkah 3. Performing SVD dari gramian')
[Up,SIGMA_P,Vp] = svd(P)
[Uq,SIGMA_Q,Vq] = svd(Q)

disp('Langkah 4.Mendapatkan Matriks Pemotong (SL dan SR)')
Vr=Up*sqrt(SIGMA_P)
Vl=Uq*sqrt(SIGMA_Q)
E=Vl'*Vr
[Ue,SIGMA_E,Ve] = svd(E)

Sl=Vl*Ue*((SIGMA_E)^(-0.5))
Sr=Vr*Ve*((SIGMA_E)^(-0.5))

disp('Langkah 5.Mendapatkan Realisasi setimbang dari sistem stabil')
Abal=Sl'*As*Sr
Bbal=Sl'*Bs;
Cbal=Cs*Sr;
Dbal=Ds;

Gbal=[Abal Bbal;Cbal Dbal]

% CEK GRAMIAN MATRIKS SETIMBANG
sys=ss(Abal,Bbal,Cbal,Dbal,1);
P_bal=gram(sys,'c')
Q_bal=gram(sys,'o')

%CEK GRAMIAN KETERKENDALIAN, Definit positif
eig_P=eig(P);

```

```

det_P=det(P);
%CEK GRAMIAN KETERAMATAN, Definit positif
eig_Q=eig(Q);
det_Q=det(Q);

%CEK GRAMIAN KESETIMBANGAN, Definit positif
P*Q;
eig_Sigma=sqrt(eig(P*Q));
det_Sigma=det(P*Q)

% Kestabilan sistem setimbang
Eigen_Abal=abs(eig(Abal))

%Terkendali (controllable) sistem setimbang
Co2 = ctrb(Abal,Bbal)
Rank_Co2=rank(Co2)
unco2=length(Abal)-rank(Co2); % Jumlah keadaan/state tidak terkendali

%Teramati (Observable) sistem setimbang
Ob2 = obsv(Abal,Cbal)
Rank_Ob2=rank(Ob2)
unob2 = length(Abal)-rank(Ob2); % Jumlah keadaan/state tidak teramati

disp('Langkah 6.Mendapatkan orde ke-r reduksi pemotongan setimbang
dari sub sistem stabil')
% 2.Konstruksi sistem tereduksi
% partisi sistem setimbang bersesuaian dengan gramian
% sigma=diag(sigma1,sigma2)

r=input('Masukkan Order Reduksi < M (Jumlah keadaan yang stabil) :
')
r=1;
[k k]=size(Abal);

% Sistem stabil tereduksi menjadi orde ke-r menggunakan metode
pemotongan
% setimbang
A_sr=Abal(1:r,1:r)
B_sr=Bbal(1:r);
C_sr=Cbal(1,1:r);
D_sr=Dbal;
G_sr=[A_sr B_sr;C_sr D_sr]

%% Reduksi sistem tidak stabil,yaitu dengan menggabungkan reduksi sub
%% sistem stabil (G_sr) dan sub sistem tidak stabil (Gu)
disp('Langkah 7.Mendapatkan sistem tereduksi dari sistem tidak
stabil')
%Gr_bt=G_sr+Gu

Gu=[Au Bu;Cu Du];
[p p]=size(Au); % ukuran matriks sub sistem tidak stabil

```

```

null_1=zeros(r,p);
null_2=zeros(p,r);
Ar_bt=[A_sr null_1;null_2 Au];
Br_bt=[B_sr;Bu];
Cr_bt=[C_sr Cu];
Dr_bt=Dbal;
Gr_bt=[Ar_bt Br_bt;Cr_bt Dr_bt];
Gr_bt

Eigen_Ar_bt=abs(eig(Ar_bt))
%Terkendali (controllable) sistem tereduksi
Co3 = ctrb(Ar_bt,Br_bt);
Rank_Co3=rank(Co3);
unco3=length(Ar_bt)-rank(Co3); % Jumlah keadaan/state tidak
terkendali

%Teramati (Observable) sistem tereduksi
Ob3 = obsv(Ar_bt,Cr_bt);
Rank_Ob3=rank(Ob3);
unob3 = length(Ar_bt)-rank(Ob3); % Jumlah keadaan/state tidak
teramati

% Kesalahan reduksi (Error)
%% Norm

[ta1,tb1]=ss2tf(A,B,C,D,1);
Sistem_Awal=tf(ta1,tb1,1);
[ta2,tb2]=ss2tf(Ar_bt,Br_bt,Cr_bt,Dr_bt,1);
Sistem_Reduksi=tf(ta2,tb2,1);
Error1=Sistem_Awal-Sistem_Reduksi;
Norm1=norm(Error1,inf)
%Error1=Sistem_Reduksi-Sistem_Awal;
%Norm1=norm(Error1,inf)

%% Kesalahan Reduksi
[ta3,tb3]=ss2tf(As,Bs,Cs,Ds,1);
Sistem_Stabil=tf(ta3,tb3,1);
[ta4,tb4]=ss2tf(A_sr,B_sr,C_sr,D_sr,1);
Sistem_StabilReduksi=tf(ta4,tb4,1);
Error2=Sistem_Stabil-Sistem_StabilReduksi;
Norm2=norm(Error2,inf)

Jumlah_hsv=0;
for i = r+1:k;
Jumlah_hsv=hsv(i)+Jumlah_hsv;
end
Jumlah_hsv;

Batas_atas_kesalahan_reduksi=2*Jumlah_hsv

%% Grafik
% step(sys) plots the step response of an arbitrary dynamic system
model, sys.
%This model can be continuous- or discrete-time, and SISO or MIMO.
%The step response of multi-input systems is the collection of step
responses for each input channel.

```



```
%The duration of simulation is determined automatically, based on the
system poles and zero
```

```
% Plotting Nilai Singular hankel
figure(1)
hsv=hsvd(sys);
xlabel('Order')
ylabel('Nilai Singular Hankel')
plot(hsv, '*')
title('Nilai Singular Hankel')
```

```
%Sub Sistem Stabil dan Sistem setimbang
figure(2)
sys1=ss(As,Bs,Cs,Ds,1);
sys2=ss(Abal,Bbal,Cbal,Dbal,1)
step(sys1,'y:',sys2,'g-')
title('Sub sistem stabil dan sistem setimbang')
```

```
%Sub Sistem Stabil dan Sistem stabil tereduksi
figure(3)
sys3=ss(As,Bs,Cs,Ds,1);
sys4=ss(A_sr,B_sr,C_sr,D_sr,1);
step(sys3,'y:',sys4,'g-')
title('Sub sistem stabil dan reduksinya')
```

```
% Sistem awal dan Sistem Akhir Tereduksi
figure(4)
sys5 = ss(A,B,C,D,1);
sys6=ss(Ar_bt,Br_bt,Cr_bt,Dr_bt,1);
step(sys5,'y:',sys6,'r')
title('Sistem Awal dan Sistem akhir tereduksi')
```

Lampiran B

Output program reduksi model

A =

Columns 1 through 9

0.8465	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0311	0.9980	-0.0653	-0.0007	0.0653	0.0020	-0.0654	-0.0033	0.0655
0	0	1.0003	0.0333	-0.0013	-0.0666	0.0026	0.0667	-0.0039
0	0	0.0327	0.9983	-0.0653	-0.0013	0.0654	0.0026	-0.0654
0	0	0	0	1.0003	0.0333	-0.0013	-0.0666	0.0026
0	0	0	0	0.0327	0.9983	-0.0653	-0.0013	0.0654
0	0	0	0	0	0	1.0003	0.0333	-0.0013
0	0	0	0	0	0	0.0327	0.9983	-0.0653
0	0	0	0	0	0	0	0	1.0003
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0327
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 10 through 12

0	0	0
0.0046	-0.0327	0.9972
-0.0668	0.0023	-0.0231
-0.0039	0.0327	-0.9970
0.0667	-0.0016	0.0032
0.0026	-0.0327	0.9968
-0.0666	0.0010	0.0167
-0.0013	0.0327	-0.9969
0.0333	-0.0003	-0.0367
0.9983	-0.0327	0.9974
0	1.0000	0.0233
0	0	0

B =

0
0
0
0
0
0
0
0
0.0005
0.0500
-0.0005
1.0000

C =

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Evals =

0.9980
0.9663
0.9663
0.9663
0.9663
1.0323
1.0323
1.0323
1.0323
0.8465
1.0000
0

Tidak_Stabil =

4

Stabil =

8

Co =

Columns 1 through 9

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.9975	1.0044	1.0468	1.1246	1.2380	1.3874	1.5736	1.7974
0	-0.0265	-0.2623	-0.4984	-0.7371	-0.9808	-1.2317	-1.4923	-1.7648
0	-0.9973	-1.0010	-1.0325	-1.0917	-1.1787	-1.2938	-1.4374	-1.6101
0	0.0065	0.1759	0.3450	0.5148	0.6862	0.8602	1.0376	1.2194
0	0.9969	0.9956	1.0089	1.0366	1.0787	1.1354	1.2068	1.2929
0	0.0134	-0.0895	-0.1922	-0.2948	-0.3977	-0.5011	-0.6052	-0.7104
0	-0.9970	-0.9933	-0.9952	-1.0027	-1.0158	-1.0345	-1.0589	-1.0888
0.0005	-0.0345	0.0004	0.0351	0.0698	0.1045	0.1391	0.1739	0.2086
0.0500	1.0474	1.0438	1.0413	1.0399	1.0397	1.0407	1.0427	1.0459
-0.0005	0.0228	0.0228	0.0228	0.0228	0.0228	0.0228	0.0228	0.0228
1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 10 through 12

0	0	0
2.0600	2.3627	2.7072
-2.0519	-2.3558	-2.6791
-1.8126	-2.0459	-2.3109
1.4067	1.6002	1.8010
1.3940	1.5103	1.6422
-0.8169	-0.9249	-1.0347
-1.1244	-1.1658	-1.2128
0.2436	0.2786	0.3139
1.0502	1.0557	1.0623
0.0228	0.0228	0.0228
0	0	0

Rank_Co =

10

Ob =

Columns 1 through 9

0	1.0000	0	0	0	0	0	0	0
0.0311	0.9980	-0.0653	-0.0007	0.0653	0.0020	-0.0654	-0.0033	0.0655
0.0574	0.9960	-0.1305	-0.0035	0.1307	0.0104	-0.1312	-0.0174	0.1318
0.0796	0.9940	-0.1957	-0.0085	0.1966	0.0254	-0.1983	-0.0424	0.2009
0.0984	0.9920	-0.2610	-0.0156	0.2632	0.0469	-0.2677	-0.0784	0.2745
0.1142	0.9900	-0.3263	-0.0249	0.3310	0.0750	-0.3404	-0.1255	0.3544
0.1275	0.9881	-0.3919	-0.0364	0.4003	0.1096	-0.4171	-0.1838	0.4424
0.1387	0.9861	-0.4577	-0.0501	0.4714	0.1509	-0.4989	-0.2537	0.5404
0.1481	0.9841	-0.5239	-0.0659	0.5448	0.1988	-0.5868	-0.3354	0.6503
0.1560	0.9822	-0.5905	-0.0839	0.6207	0.2536	-0.6816	-0.4293	0.7740
0.1626	0.9802	-0.6576	-0.1040	0.6996	0.3152	-0.7845	-0.5358	0.9135
0.1682	0.9782	-0.7252	-0.1264	0.7818	0.3839	-0.8963	-0.6554	1.0710

Columns 10 through 12

0	0	0
0.0046	-0.0327	0.9972
0.0244	-0.0661	1.0031
0.0595	-0.1012	1.0437
0.1102	-0.1393	1.1188
0.1768	-0.1813	1.2288
0.2599	-0.2286	1.3741
0.3600	-0.2824	1.5551
0.4781	-0.3437	1.7730
0.6151	-0.4141	2.0286
0.7721	-0.4947	2.3234
0.9505	-0.5869	2.6589

Rank_Ob =

11

Stabil_Gs =

0.9980
0.8465
0.9663
0.9663
0.9663

```

0.9663
0

Col =

-0.0041  -0.0748  -0.0744  -0.0740  -0.0736  -0.0732  -0.0728
0         0         0         0         0         0         0
0.0002  -0.1130  -0.0848  -0.0601  -0.0385  -0.0197  -0.0035
-0.0004  -0.2353  -0.1971  -0.1622  -0.1305  -0.1018  -0.0757
0.0008  -0.4336  -0.3862  -0.3416  -0.2996  -0.2600  -0.2227
-0.0245  -0.5514  -0.5329  -0.5149  -0.4976  -0.4808  -0.4646
16.0000         0         0         0         0         0         0

Rank_Col =

6

unco1 =

1

Ob1 =

-17.3644  -0.0000  -7.0040  2.4502  -0.9750  1.4097  0.0156
-17.3297  0.0000  -6.7308  2.5907  -0.9049  1.4712  0.0705
-17.2950  0.0000  -6.4668  2.7168  -0.8464  1.5181  0.0623
-17.2605  0.0000  -6.2119  2.8294  -0.7984  1.5522  0.0553
-17.2260  0.0000  -5.9655  2.9293  -0.7602  1.5749  0.0493
-17.1915  0.0000  -5.7276  3.0171  -0.7307  1.5878  0.0441
-17.1572  0.0000  -5.4978  3.0937  -0.7091  1.5923  0.0397

Rank_Ob1 =

7

unob1 =

0

a =

      x1      x2      x3      x4      x5      x6
x1      0.998 -2.737e-008 -0.002153  0.001398  0.0002232 -0.0008514
x2      0      0.8465      0      0      0      0
x3      0      0      0.9663  -0.0353  -0.01724  -0.01549
x4      0      0      0      0.9663  -0.03247  -0.02943
x5      0      0      0      0      0.9663  -0.05932
x6      0      0      0      0      0      0.9663
x7      0      0      0      0      0      0

      x7
x1 -0.004421
x2      0
x3 -0.007097
x4 -0.01473
x5 -0.02723
x6 -0.03298
x7      0

b =

      u1
x1 -0.004123
x2      0
x3 0.000221
x4 -0.0003918
x5 0.0007606
x6 -0.02454
x7      16

c =

      x1      x2      x3      x4      x5      x6
y1 -17.36 -1.849e-022 -7.004 2.45 -0.975 1.41

      x7
y1 0.01559

d =

      u1

```

```

y1    0

Sampling time: 1
Discrete-time model.
1 state removed.

Gs =

    0.9980    -0.0022     0.0014     0.0002    -0.0009    -0.0044    -0.0041
         0     0.9663    -0.0353    -0.0172    -0.0155    -0.0071     0.0002
         0         0     0.9663    -0.0325    -0.0294    -0.0147    -0.0004
         0         0         0     0.9663    -0.0593    -0.0272     0.0008
         0         0         0         0     0.9663    -0.0330    -0.0245
         0         0         0         0         0         0     16.0000
   -17.3644   -7.0040     2.4502    -0.9750     1.4097     0.0156         0

Stabil_Gs =

    0.9980
    0.9663
    0.9663
    0.9663
    0.9663
    0

Mc_Gsm =

   -0.0041   -0.0748   -0.0744   -0.0740   -0.0736   -0.0732
    0.0002   -0.1130   -0.0848   -0.0601   -0.0385   -0.0197
   -0.0004   -0.2353   -0.1971   -0.1622   -0.1305   -0.1018
    0.0008   -0.4336   -0.3862   -0.3416   -0.2996   -0.2600
   -0.0245   -0.5514   -0.5329   -0.5149   -0.4976   -0.4808
   16.0000         0         0         0         0         0

Rank_Mc_Gsm =

    6

Mo_Gsm =

   -17.3644   -7.0040     2.4502    -0.9750     1.4097     0.0156
   -17.3297   -6.7308     2.5907    -0.9049     1.4712     0.0705
   -17.2950   -6.4668     2.7168    -0.8464     1.5181     0.0623
   -17.2605   -6.2119     2.8294    -0.7984     1.5522     0.0553
   -17.2260   -5.9655     2.9293    -0.7602     1.5749     0.0493
   -17.1915   -5.7276     3.0171    -0.7307     1.5878     0.0441

Rank_Mo_Gsm =

    6

I. GRAMIAN KETERKENDALIAN P & GRAMIAN KETEREMATAN Q

P =

    1.3940   -0.2355     0.4021   -0.8253     1.0620   -0.0660
   -0.2355     0.2550   -0.0109     0.0735   -0.0881     0.0035
    0.4021   -0.0109     0.8939   -0.0909     0.1600   -0.0063
   -0.8253     0.0735   -0.0909     3.7160   -0.3654     0.0122
    1.0620   -0.0881     0.1600   -0.3654     4.5936   -0.3927
   -0.0660     0.0035   -0.0063     0.0122   -0.3927   256.0000

Q =

1.0e+004 *

    7.5501   -0.1140     0.2893   -0.1134   -0.2496   -0.0255
   -0.1140     0.0818   -0.0799     0.0310   -0.0164     0.0008
    0.2893   -0.0799     0.1052   -0.0514     0.0226   -0.0016
   -0.1134     0.0310   -0.0514     0.0345   -0.0231     0.0009
   -0.2496   -0.0164     0.0226   -0.0231     0.0379     0.0003
   -0.0255     0.0008   -0.0016     0.0009     0.0003     0.0001

det_Sigma =

    7.0340e+013

```

Langkah 2. Menentukan nilai nilai singular hankel (HSV)

hsv =

```
327.1102
45.1700
20.2872
9.9500
3.4579
0.8132
```

Langkah 3. Performing SVD dari gramian

Up =

```
-0.0003    0.3338   -0.1107   -0.6691    0.5823    0.2993
0.0000   -0.0371    0.0149    0.1341   -0.3059    0.9417
-0.0000    0.0713   -0.0186   -0.6618   -0.7327   -0.1406
0.0001   -0.4009    0.8801   -0.2168    0.1264    0.0421
-0.0016    0.8493    0.4612    0.2220   -0.1210   -0.0447
1.0000    0.0014    0.0006    0.0002   -0.0001   -0.0000
```

SIGMA_P =

```
256.0006    0    0    0    0    0
0    5.2000    0    0    0    0
0    0    3.6314    0    0    0
0    0    0    1.2191    0    0
0    0    0    0    0.6119    0
0    0    0    0    0    0.1892
```

Vp =

```
-0.0003    0.3338   -0.1107   -0.6691    0.5823    0.2993
0.0000   -0.0371    0.0149    0.1341   -0.3059    0.9417
-0.0000    0.0713   -0.0186   -0.6618   -0.7327   -0.1406
0.0001   -0.4009    0.8801   -0.2168    0.1264    0.0421
-0.0016    0.8493    0.4612    0.2220   -0.1210   -0.0447
1.0000    0.0014    0.0006    0.0002   -0.0001   -0.0000
```

Uq =

```
-0.9985   -0.0324    0.0220   -0.0378   -0.0098    0.0044
0.0156   -0.5848    0.5875    0.4982   -0.2538    0.0057
-0.0388    0.6835    0.0037    0.5640   -0.4615    0.0128
0.0152   -0.3475   -0.5071   -0.1991   -0.7626    0.0248
0.0329    0.2627    0.6302   -0.6264   -0.3734    0.0319
0.0034   -0.0051   -0.0110    0.0150    0.0383    0.9991
```

SIGMA_Q =

```
1.0e+004 *
7.5732    0    0    0    0    0
0    0.1947    0    0    0    0
0    0    0.0326    0    0    0
0    0    0    0.0082    0    0
0    0    0    0    0.0008    0
0    0    0    0    0    0.0000
```

Vq =

```
-0.9985   -0.0324    0.0220   -0.0378   -0.0098    0.0044
0.0156   -0.5848    0.5875    0.4982   -0.2538    0.0057
-0.0388    0.6835    0.0037    0.5640   -0.4615    0.0128
0.0152   -0.3475   -0.5071   -0.1991   -0.7626    0.0248
0.0329    0.2627    0.6302   -0.6264   -0.3734    0.0319
0.0034   -0.0051   -0.0110    0.0150    0.0383    0.9991
```

Langkah 4. Mendapatkan Matriks Pemotong (SL dan SR)

Vr =

```
-0.0043    0.7611   -0.2109   -0.7388    0.4555    0.1302
0.0002   -0.0847    0.0284    0.1480   -0.2393    0.4097
-0.0004    0.1625   -0.0354   -0.7307   -0.5731   -0.0612
0.0008   -0.9143    1.6771   -0.2393    0.0988    0.0183
-0.0250    1.9368    0.8788    0.2452   -0.0947   -0.0195
16.0000    0.0033    0.0012    0.0002   -0.0000   -0.0000
```

V1 =

-274.7705	-1.4297	0.3975	-0.3422	-0.0285	0.0002
4.2925	-25.8054	10.6119	4.5126	-0.7353	0.0003
-10.6901	30.1609	0.0660	5.1090	-1.3372	0.0007
4.1945	-15.3326	-9.1597	-1.8037	-2.2098	0.0014
9.0479	11.5903	11.3832	-5.6736	-1.0820	0.0018
0.9282	-0.2230	-0.1993	0.1357	0.1109	0.0557

E =

15.8029	-197.5312	73.4400	212.6728	-120.4897	-33.4600
-3.8837	42.4663	-17.0298	-18.2924	-14.3758	-13.1094
-3.4796	29.8356	-5.1429	6.2117	-4.3788	4.0057
2.3114	-9.1512	-7.9914	-3.7717	-3.8047	1.5689
1.7994	-0.2516	-4.6243	1.1529	0.8134	-0.2426
0.8914	0.0026	0.0039	-0.0005	-0.0004	0.0001

Ue =

-0.9930	-0.1167	0.0183	-0.0081	0.0023	-0.0001
0.1094	-0.8392	0.4936	-0.1954	0.0443	-0.0022
0.0445	-0.5242	-0.7154	0.4360	-0.1456	0.0113
-0.0083	0.0852	0.4908	0.7866	-0.3642	0.0203
0.0010	-0.0087	0.0572	0.3908	0.9141	-0.0916
-0.0001	0.0015	0.0044	0.0145	0.0933	0.9955

SIGMA_E =

327.1102	0	0	0	0	0
0	45.1700	0	0	0	0
0	0	20.2872	0	0	0
0	0	0	9.9500	0	0
0	0	0	0	3.4579	0
0	0	0	0	0	0.8132

Ve =

-0.0498	0.0758	0.1036	0.1656	0.3636	0.9063
0.6181	-0.6422	-0.4190	-0.0986	0.0532	0.1322
-0.2291	0.1722	-0.3732	-0.7643	-0.3330	0.2889
-0.6508	-0.2890	-0.5605	0.2048	0.3484	-0.1247
0.3604	0.6218	-0.3937	-0.0800	0.5357	-0.1874
0.0977	0.2865	-0.4531	0.5748	-0.5881	0.1641

S1 =

15.0779	4.9136	-1.3724	0.7625	-0.3531	0.0465
-0.3677	2.3781	-4.0138	4.0882	-2.6846	0.3729
0.7671	-3.5190	3.7912	-0.7231	-0.9586	0.1790
-0.3449	2.5361	-0.4330	-1.0507	-0.3756	0.1085
-0.3961	-2.5627	-1.1332	-0.7168	-0.0245	0.0957
-0.0529	0.0289	0.0272	0.0317	0.0422	0.0512

Sr =

0.0651	0.0013	-0.0144	-0.0087	0.0103	0.0709
-0.0111	-0.0022	-0.0332	0.0861	-0.1782	0.1007
0.0205	-0.0407	0.1350	-0.0406	-0.2717	0.2210
-0.0418	0.1506	-0.0346	-0.3925	-0.3485	0.4200
0.0443	-0.1830	-0.2738	-0.2600	-0.0821	0.5227
-0.0440	0.1801	0.3677	0.8396	3.1280	16.0818

Langkah 5.Mendapatkan Realisasi setimbang dari sistem stabil

Abal =

0.9988	-0.0016	0.0012	-0.0015	0.0018	-0.0022
0.0016	0.9971	0.0095	-0.0048	0.0082	-0.0091
0.0012	-0.0095	0.9944	0.0234	-0.0133	0.0190
0.0015	-0.0048	-0.0234	0.9850	0.0538	-0.0414
0.0018	-0.0082	-0.0133	-0.0538	0.9217	0.1819
0.0022	-0.0091	-0.0190	-0.0414	-0.1819	-0.0335

```
Gbal =
    0.9988 -0.0016  0.0012 -0.0015  0.0018 -0.0022 -0.8988
    0.0016  0.9971  0.0095 -0.0048  0.0082 -0.0091  0.5083
    0.0012 -0.0095  0.9944  0.0234 -0.0133  0.0190  0.4663
    0.0015 -0.0048 -0.0234  0.9850  0.0538 -0.0414  0.5221
    0.0018 -0.0082 -0.0133 -0.0538  0.9217  0.1819  0.6760
    0.0022 -0.0091 -0.0190 -0.0414 -0.1819 -0.0335  0.8174
    -0.8988 -0.5083  0.4663 -0.5221  0.6760 -0.8174  0
```

```
P_bal =
    327.1102 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000
    -0.0000  45.1700  0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000
    0.0000  0.0000  20.2872  0.0000 -0.0000  0.0000
    -0.0000 -0.0000  0.0000  9.9500  0.0000 -0.0000
    0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  3.4579  0.0000
    0.0000 -0.0000  0.0000 -0.0000  0.0000  0.8132
```

```
Q_bal =
    327.1102  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
    0.0000  45.1700  0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
    0.0000  0.0000  20.2872  0.0000  0.0000 -0.0000
    0.0000 -0.0000  0.0000  9.9500  0.0000 -0.0000
    0.0000 -0.0000  0.0000  0.0000  3.4579  0.0000
    0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000  0.8132
```

```
det_Sigma =
    7.0340e+013
```

```
Eigen_Abal =
    0.0000
    0.9980
    0.9663
    0.9663
    0.9663
    0.9663
```

```
Co2 =
    -0.8988 -0.8993 -0.8974 -0.8959 -0.8947 -0.8937
    0.5083  0.5054  0.5123  0.5177  0.5217  0.5246
    0.4663  0.4766  0.4665  0.4592  0.4542  0.4512
    0.5221  0.5021  0.5267  0.5432  0.5524  0.5550
    0.6760  0.7316  0.6011  0.4840  0.3792  0.2857
    0.8174 -0.1875 -0.1633 -0.1412 -0.1213 -0.1032
```

```
Rank_Co2 =
    6
```

```
Ob2 =
    -0.8988 -0.5083  0.4663 -0.5221  0.6760 -0.8174
    -0.8993 -0.5054  0.4766 -0.5021  0.7316  0.1875
    -0.8974 -0.5123  0.4665 -0.5267  0.6011  0.1633
    -0.8959 -0.5177  0.4592 -0.5432  0.4840  0.1412
    -0.8947 -0.5217  0.4542 -0.5524  0.3792  0.1213
    -0.8937 -0.5246  0.4512 -0.5550  0.2857  0.1032
```

```
Rank_Ob2 =
    6
```

Langkah 6.Mendapatkan orde ke-r reduksi pemotongan setimbang dari sub sistem stabil

```
A_sr =
    0.9988
```



```

G_sr =
    0.9988    -0.8988
   -0.8988         0

Langkah 7.Mendapatkan sistem tereduksi dari sistem tidak stabil

Gr_bt =
    0.9988         0         0         0         0         0    -0.8988
         0    1.0323   -0.0620    0.0321   -0.0174    0.0009   -0.2121
         0         0    1.0323   -0.0342    0.0185   -0.0006    0.2363
         0         0         0    1.0323   -0.0368   -0.0009   -0.5164
         0         0         0         0    1.0323   -0.0014    0.9656
         0         0         0         0         0    1.0000    0.0950
   -0.8988   -3.7625   -3.2642   -1.5663   -0.8370   -3.2687         0

Eigen_Ar_bt =
    0.9988
    1.0323
    1.0323
    1.0323
    1.0323
    1.0000

Norm1 =
    7.2261

Norm2 =
    63.5632

Batas_atas_kesalahan_reduksi =
    159.3567

a =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
x1    0.9988  -0.001621  0.001207  -0.00148  0.00184  -0.002249
x2    0.001621  0.9971  0.009491  -0.004805  0.008202  -0.009105
x3    0.001207  -0.009491  0.9944  0.02343  -0.01326  0.01904
x4    0.00148  -0.004805  -0.02343  0.985  0.0538  -0.04144
x5    0.00184  -0.008202  -0.01326  -0.0538  0.9217  0.1819
x6    0.002249  -0.009105  -0.01904  -0.04144  -0.1819  -0.03355

b =
      u1
x1  -0.8988
x2   0.5083
x3   0.4663
x4   0.5221
x5   0.676
x6   0.8174

c =
      x1      x2      x3      x4      x5      x6
y1  -0.8988  -0.5083  0.4663  -0.5221  0.676  -0.8174

d =
      u1
y1    0

Sampling time: 1
Discrete-time model.

```


BIODATA PENULIS

Nama : Kiki Mustaqim
TTL : Aceh, 10 Oktober 1989
Istri : Istiqomah B.A
Anak : Raihanah Husna Tsurayyana
Alamat : Jl Sarimanah XII, Perumnas Sarijadi



Riwayat Pendidikan :

SMPN 1 Lhoksukon, Aceh Utara

SMAN 3 Putra Bangsa, Aceh Utara

Program Sarjana Matematika UPI Bandung

Program Magister Matematika ITS Surabaya

Kontak :

Hp/WA.0898 6020915

Email. Kiki.mustaqim14@mhs.matematika.its.ac.id

Kikimustaqim2007@gmail.com

Sekilas Biografi :

Seorang anak yang lahir dari orang tua bernama Bukhari Rasyid (POLRI) dan Mena Risa (IRT), merupakan anak kedua dari tujuh bersaudara. Lahir di sebuah desa kecil di aceh utara yaitu desa blang. Mulai merantau untuk menempuh pendidikan sarjana di bandung pada tahun 2007 dan melanjutkan pendidikan ke surabaya melalui program beasiswa Pra Magister Sainstek yang merupakan program turunan dari MP3EI. Menikah pada usia 25 tahun ketika sedang menjalani tahun pertama dari program magister matematika ITS pada tahun 2014 dan setahun berikutnya dikarunia seorang anak perempuan. Penulis juga aktif dalam keorganisasian himpunan mahasiswa pascasarjana dan forum silaturahmi mahasiswa muslim pascasarjana.